STEVEN SPIELBERG DIGITAL YIDDISH LIBRARY
NO. 01975

DER KLEYNER GEOMETER

Grace Chisholm Young

NATIONAL YIDDISH BOOK CENTER
AMHERST, MASSACHUSETTS

NATIONAL YIDDISH BOOK CENTER
AMHERST, MASSACHUSETTS
413 256-4900 | YIDDISH@BIKHER.ORG
WWW.YIDDISHBOOKCENTER.ORG

•

MAJOR FUNDING FOR THE
STEVEN SPIELBERG DIGITAL YIDDISH LIBRARY
WAS PROVIDED BY:

Lloyd E. Cotsen Trust
Arie & Ida Crown Memorial
The Seymour Grubman Family
David and Barbara B. Hirschhorn Foundation
Max Palevsky
Robert Price
Righteous Persons Foundation
Leif D. Rosenblatt
Sarah and Ben Torchinsky
Harry and Jeanette Weinberg Foundation
AND MEMBERS AND FRIENDS OF THE
National Yiddish Book Center

•

The *goldene pave*, or golden peacock, is a traditional symbol of Yiddish creativity. The inspiration for our colophon comes from a design by the noted artist Yechiel Hadani of Jerusalem, Israel.

The National Yiddish Book Center respects the copyright and intellectual property rights in our books. To the best of our knowledge, this title is either in the public domain or it is an orphan work for which no current copyright holder can be identified. If you hold an active copyright to this work – or if you know who does – please contact us by phone at 413-256-4900 x153, or by email at digitallibrary@bikher.org

יונג און יונג

דער
קליינער געאָמעטער

ערשטער קורס פון געאָמעטריע

איבערגעזעצט אויף יידיש פון
אל. אלשוואנגער

מיט 128 פיגורן אין דעם טעקסט

דרעזדען
פאַרלאַג «וואסטאק», דרעזדען A. 24
1921

הקדמה פון דעם איבערזעצער·

שוין אין 1916 יאר האב איך אנגעהייבן שרייבן א לערנבוך פון געא־מעטריע פאר מיטעלע שולן· צוליב פארשיידענע סיבות האב איך ניט געקענט פארענדיגן די ארבעט· אבער שוין דעמאלט האב איך געהאט אויסגעארבעט די גאנצע טערמינאלאגיע׳ און אין 1918 יאר האב איך זי איבערגעגעבן דער קאמיסיע פון די יידישע לערער אין ווילנע·

אין 1919 יאר האב איך באקומען א אויפטראג פון דעם פארלאג «וואסטאק» אין דרעזדען אויפצושרייבן פאר אים א לערנבוך פון געא־מעטריע פאר יידישע פאלקסשולן·

איך האב באשלאסן איבערצוזעצן «דעם קליינעם געאָמעטער» פון דעם ענגלישן מאטעמאטיקער פראפעסאר וו· יונג און זיין פרוי ג· ה· יונג·

דער «קליינער געאָמעטער» איז א פראפעדעווטישער קורס· ער שטייט איינציג צווישן אלע לערנביכער פון געאמעטריע·

דער פאכמאן וועט נשתומם ווערן׳ זעהענדיג׳ ווי די אווטארן זיינען גובר געוועזן אלע מניעות׳ און ווי עס האט זיך זיי איינגעגעבן צו פאראייניגן קלארקייט מיט שטרענגקייט׳ בויענדיג דעם גאנצן בנין אויף די מאדערנע פרינציפן פון דער געאמעטרישער דידאקטיק און דער קריטישער פארשונג·

די אווטארן זיינען אויסן׳

1· אז אין די קעפ פון די קינדער זאלן זיך בהדרגה שאפן׳ זאלן בהדרגה אויסוואקסן די פונדאמענטאלע געאמעטרישע באגריפן און פארשטעלונגען׳

2· אז די קינדער זאלן זיך ביסלעכווייז צוגעוואוינען אויסצודריקן די געדאנקען גענוי און שטרענג׳

3· אז אין די קינדער זאל זיך אנטוויקלען דער נאטירליכער געא־מעטרישער אינסטינקט·

לויט אונזער מיינונג האבן דאס די אווטארן דערגרייכט אין דער פולסטער מאס·

דער סכום פון געאמעטרשיע ידיעות, וואס «דער קליינער געאָמעטער» גיט דעם קינד, איז זעהר גרויס, און דאס קינד באקומט דורך זיי די בעסטע צוגרייטונג צו א סיסטעמאטישן קורס פון געאמעטריע·

✷

די יידישע איבערזעצונג גיב איך רוהיג איבער אויפן משפט פון דער קריטיק·

די טערמינאלאגיע וועט אפשר ארויסרופן חלוקי־דעות· איך וועל דא ניט שרייבן וועגן די טעמים, פארוואס איך האב אויסגעקליבן דעם אדער יענעם טערמין· מיינע נאהנטע פריינד ווייסן, ווי פארזיכטיג און באקלערט איך האב אויסגעארבעט די טערמינאלאגיע·

נאר אויף איניגע ווערטער וועל איך זיך דא אפשטעלן:

1· «איינניטונג» (exercitio), פון דעם ווארט «געניט»· איך האב געזוכט א בעסערן אויסדרוק, אבער איך האב ניט געפונען· דער שורש«ניט»איז אין דער יידישר שפראך פארהאן, און דער וויסענשאפטליכער שריפט־שטעלער האט ניט בלויז דאס רעכט, נייערט דעם חוב צו «ראטעווען» שרשים·

2· «שרעג» (obliquus)· דעם שורש טרעפט מען אין דעם ווארט «שרעג־איבער»· אין קאוונע האב איך פון נייטערקעס געהערט דעם אויסדרוק: «א שרעגע שטיק לייוונט», «א שרעג געשניטענע שטיק לייוונט», «א שרעג»· מיט דעם לעצטן ווארט באצייכנט מען דעם שרעגן ווינקל פון א שטיקל לייוונט פאר קאָלנערס· אין פוילן רופט מען דאס «א אוקאָס»·

3· די קאניונקציע «נייערט»· דאס ווארט מוזן מיר «ראטעווען» ביי דער ארימקייט פון דער יידישער שפראך אין פארטיקלען· מיר קענען ניט מיט דעמזעלביגן ווארט «נאר» באצייכענען אזעלכע פארשיידענע פאר־טיקלען ווי «בלויז» און · · · און «נייערט»·

הקדמה פון די אויטאָרן.

דער למוד פון געאָמעטריע אין אונזערע מיטעלע שולן ליידט זעהר שטארק דערפון, וואס אונזערע קינדער זיינען ניט צוגעוואוינט צו געאָמעטרישער אנשויאונג. דער גאנג פון דעם למוד, לא־די וואס ער שטארק ניט אין זיי די געאָמעטרישע פארשטעלונגען, שוואכט ער נאך זייער נאטירליכן געאָמעטרישן חוש.

אוודאי איז די פלאנימעטריע אין א געוויסן זין אבסטראקטער, איידער די געאָמעטריע פון דריי אויסמעסטונגען, וואס האט צו טאן מיט קערפער. דער אנהייבער ווערט לייכטער תופש זיין סטערעאָמעטריע, איידער פלאני־מעטריע. פונדעסטוועגן האט די פלאנימעטריע אין משך פון הונדערטער יארן פארנומען א זעלבשטענדיגן פלאץ, אלס א צוגרייטנדיגער למוד. דער גרונט דערפון ליגט אין דעם דידאקטישן ווערט פון דעם מעטאד, וואס באשטייט אין צייכענען פיגורן אויף דעם פאפיר, אויף דער טאוול וכד״ו. דער מעטאד האט אַטוועלכע מעלות:

1. ער פאָדערט ניט קיין ספעציעלע אפאראטן.

2. מען קען אים לייכט אויסלערנען און באַנעמען, ער פאדערט בלויז התמדה און געניטקייט.

3. מען קען איבערחזרן די פיגורן, ווי אפט מען וויל, אזוי אז, וואס גרעסער עס ווערט די טעכנישע געניטקייט פון דעם שילער, אלץ טיפער ווערט פאראיינס זיין באהאוונטקייט אין די ידיעות, וואס די פיגורן גיבן אים.

עס ווייזט אויס, אז, מחמת פאר דער סטערעאָמעטריע האט געפעלט אזא דידאקטישער מעטאָד, וואס זאל באפרידיגן אלע יענע פאדערונגען, פלעגט מען דעם למוד פון סטערעאָמעטריע אריבערטראגן אין העכערע קלאסן, וואו די שילער האבן שוין געהאט אזא עלטער, ווען די עלעמענטארע אֶמתן בנוגע דעם רוים און בנוגע די פעסטע קערפער האבן שוין אנגעוואורן פאר זיי דעם נאטירליכן אינטערעס. דעריבער קוקט מען

אויף דער סטערעאמעטריע, ווי אויף איינעם פון די שווערסטע און אומ־פארשטענדליכסטע מאטעמאטישע למודים· ערנסט ווערט זי געלערנט בלויז אין די מיטעלע שולן און אין די אוניווערסיטעטן, און דאס דאס רוב מיט אַנאַליטישע מיטלען· בכלל האלט מען, אז געאמעטריע דארף מען לערנען אין די מיטעלע שולן, און מען טאר זי ניט אנהייבן מיט קינדער, וואס זיינען יינגער פון צעהן יאר· מיר האבן אפט געהערט די מיינונג, אז עס וואלט געווען א גרויל, צו «פלאָגן» א קליין קינד מיט געאמעטריע·

די געאמעטריע, ווי מיר פארשטייען זי, איז ניט קיין פלאָג· זי פאדערט ניט קיין טאוול, קיינע ספעציעלע אפאראטן, זי פאדעדט ניט קיין געניטן לערער, זי פאדערט אויך ניט א אנגעשטרענגטע אויפמערק־זאמקייט פונם קינד· זי איז באזונדערס צוגעפאסט צו די גאָר יונגע יארן[1]· א קינד פון 10 יאָר אדער מער פארמאגט ניט די עלעמענטארסטע געא־מעטרישע באגריפן, ווען מען האט אים צו זיי ניט צוגעגרייט· ניט עס ווייס, וואס דאס איז דער עצם פון א ווינקל, ניט עס פארשטייט די צוזאנאנדערדיגע באציהונג פון די אָביעקטן אינם רוים, ניט עס קען זיי קלאר אונטערשיידן· פון דער אנדערער זייט האבן דעמאָנסטראציעס פון פשוטע געאמעטרישע פאָרמען א קנאַפן אינטערעס פאר א שילער פון 10 יאָר· ער האט שוין מער קיין חשק ניט זיך אוועקצוזעצן ציילן די עקן פון א קוב, דרייען דעם מאָדעל אהין און אהער, אוסשניידן אים מי יודע וויפיל מאל· אבער אהן אזעלכע פשוטע פראקטישע איינגיטונגען וועט ער קיינמאל ניט האבן די פולע פארשטעלונג פון א קוב און פון די מיגליכקייטן, וואס ער פארשאפט אויף אויסצודריקן א פולע פונדאמענטאלע באציהונגען אין דער געאמעטריע·

די מניעה צו דער אנטוויקלונג פון דעם געאמעטרישן למוד אין די עלעמענטארע שולן איז דער עיקר באשטאנען דעריין, וואס עס האט געפעלט א מעָטאָד, וואס זאל קענען אויפטאן אין דער סטעראמעטריע דאס אייגענע, וואס די צייכענונגען טוען אויף אין דער פלאנימעטריע· דאס סטערעאמעטרישע צייכענען איז צו שווער, דאס מאָדעלירן — וואס איז אגב באגרענציט מיט דער אויספארטיגונג פון מאָדעלן פון טאַקטור —

[1]) אין וועלכן עלטער מען דארף אנהייבן, לאזט זיך, פארשטייט זיך, בלויז אינדיווידועל אפ־שאַצן· לויט אונזער נסיון האבן א באזונדערע הנאה פון דער געאמעטריע קינדער פון 7 און פון 8 יאָר, אבער אפילו פאר קינדער פון 4 און 5 יאָר זיינען פארהאן געוויסע טיילן פון דער געא־מעטריע, וואס געפעלן זיי, ווענדט זיך אן די כשרונות פון די קינדער·

האט דעמזעלביגן חסרון, עס איז דערצו נאך טייער און פאָדערט א שטענדיגע השגחה.

פאפיר, וויפיל עס גלוסט זיך, א בליישטיפט און שפילקעס, אפילו א שערל — דאס קען מען געבן אפילו די קלענסטע קינדער אין די הענט, אבער באין אופן ניט טאַקטור, פּאַפּ, ווער רעדט שוין פון א מעסער. די מעטאָדן, וואס מיר באנוצן אין אונזער קליינעם בוך, פאדערן ניט קיין שום אפאראטן, אחוץ פאפיר, אַמאָל א פּאָר שפילקעס, א בליישטיפט און א שערל. אגב קען מען זיך באגיין אהן א שערל. די מאָדעלן און פיגורן, וואס ווערן צוגעגרייט מיט אטדי איינפאכע מיטלען, זיינען גענוי און האלטן זיך לאנג, ווען מען ארבעט אַקוראַט. ממילא וועלן די ערשטע פּאָר מאל די פיגורן ארויסקומען ניט זעהר גוט, אבער די קינדער קענען זיי צוגרייטן אזוי אפט, ווי מען וויל, און זיך איינניטן אין דער ארבעט. וואס פלינקער עס הייבן אן צו ארבעטן די פינגער, אלס געניטער ווערט דאס קינד אין דער ארבעט, און פאראיינס פארגרעסערן זיך און פארטיפן זיך די געאמעטרישע ידיעות, וואס עס באקומט מיט דער הילף פון די מאָדעלן. דווקא דעריבער, ווייל דאס קינד קען זיך פארנעמען מיט דער ארבעט אליין, לערנט עס זיך, ניט מען לערנט אים, און עס אנטוויקלט אין זיך דאס, וואס מען רופט אָן «געאמעטרישער אינסטינקט».

דאס איז דער יסוד פון אונזער קליינעם בוך. עס איז ניט סתם א לערנבוך. עס וועט זיין א געוואונשענער פירער פאר דעם לערער אדער פאר דעם גובערנער, וואס איז אויסן ניט בלויז צו לייענען לעקציעס פאר זיינע שילער, נייערט אויך צו זיין א וועגווייזער זייערער. נאך מער איז אונזער בוך באשטימט פאר די קינדער גופא, דעריבער איז אין אים פארהאן אזא גרויסע צאָל פיגורן. עטליכע ערטער אין דעם בוך וועלן אינאנהייב אויסווייזן שווער, מען קען זיי אפריהער איבערהיפן און לערנען זיי שפעטער ביים איבערחזרן דעם קורס. די כוונה פון דעם בוך איז צו וועקן ביי די קינדער דעם חשק צו מאָדעלירן און צו געבן זיי ריכטיגע פארשטעלונגען און באגריפן וועגן פראגן, וואס אינטערעסירן זיי.

מיר וואלטן געגעבן די עצה אנוצהייבן צו לערנען גאנץ קליינע קינדער, ווי אזוי מען קנייטשט אויס מאָדעלן פון א ראָמב, פין גלייכאקסלדיגע און גלייכזייטיגע דרייעקן, פון א קויל, א קוב, א פריזמע, א טעטראעדער, א אקטאעדער וכ״ו. זיי קענען צוגרייטן די מאָדעלן אדער אזוי, ווי עס איז געוויזן אין דעם בוך, אדער אויסשניידן זיי אויף אן אנדער שטייגער,

פארהעפטן די טיילן, ציילן די עקן, קאַנטן און ווענטלעך און באטראכטן געננוי זייער לאגע. אויף אזא אופן (און אפשר טאַקע ניט אנדערש ווי אויף אזא אופן) קריגן די קינדער א פולקומע באהאוונטקייט אין דער אָפּשאַצונג פון דער פאָרם און פון דער לאַגע פון קערפער, ד. ה. דאס, וואס מען רופט «געאמעטרישער אינסטינקט».

פון עלטערע שילער קען מען שוין פארלאנגען שווערערע אויפגאבן, דהיינו אויסקנייטשן און צייכענען די פיגורן, מבאר זיין די באנוצטע מע־טאָדן און באנוצן זיי פאַר אנדערע פראבלעמעס.

פון אלע עלעמענטארע געאמעטרישע באגריפן איז — דאס איז כדאי אויפצווייזן — דער ריכטיגער באגריף פון א ווינקל דער שווערסטער, ער ווערט זעהר פאמעליך און בלויז ביסלעכווייז קלאר. די צוגרייטונג פון מאָדעלן פון ווינקלען, דערנעהנטערטע מעסטונגען מיט אזעלכע מאָדעלן, די אויסקנייטשונג פון די פיגורן פאר די טעארעמעס בנוגע די ווינקלען פון א דרייעק, פאַר דער טיילונג פון ווינקלען, בפרט פון גראָדע ווינקלען — דאס זיינען די בעסטע מיטלען, כדי צו געבן קלאר צו פארשטיין דעם שילער דעם ריכטיגן באגריף פון א ווינקל.

עס איז א ידוע־זאך, אז אפילו גרויסע מענשן גיבן אפט א פאלשן ענטפער, ווען מען פרעגט זיי למשל, ווי גרויס די לבנה איז. דאס שטאמט דערפון, וואס זיי האבן ניט קיין ריכטיגן באגריף פון דעם ווינקל, אונטער וועלכן מיר זעהען די אביעקטן ארום אונז.

נאָך איין פונקט מוז דא דערמאנט ווערן. עס זיינען פארהאן אזעלכע זאַצן, וואס יעדער איינער מוז זיי וויסן, אלץ איינס, צי קען ער זיי באַ־ווייזן אדער ניט. דאס זיינען למשל די טעארעמעס: צוויי זייטן פון א דרייעק זיינען צוזאמען גרעסער ווי די דריטע זייט; אין א דרייעק ליגט אנטקעגן דעם גרעסערן ווינקל די גרעסערע זייט; צוויי ווינקלען פון א דרייעק זיינען צוזאמען קלענער ווי צוויי גראָדע ווינקלען; די פיטא־גאָראַאישע טעארעמע וכ״ו. די באווייזן, וואס עווקליד גיט פאר אטדי טעארעמעס, זיינען לחלוטין דיסקורסיוו. מיר זיינען אין אונזער בוך אויסן געווען, אז דער שילער זאל אטדי ידיעות תופש זיין מיט זיין אינ־טואיציע. דאס קען מען דערגרייכן, ווען מען לאזט דעם שילער אויס־קנייטשן און איבערקנייטשן די מאָדעלן אזוי אפט, ביז דער באווייז ווערט אים קלאָר. מיט צייכענונגען קען מען דאס באין אופן ניט דער־גרייכן.

לאמיר איצט רעזומירן די כאראקטעריסטישע סימנים פון אונזער בוך:

1· די עקספאָזיציע פון עלעמענטארע געאמעטרישע געדאנקען;

2· די גראַפישע עקספּאָזיציע פון די עלעמענטארע געאמעטרישע טעאָ־רעמעס;

3· די דעמאנסטראציע פון פראקטישע מעטאָדן מיט איינפאכסטע מיטלען·

Grace Chisholm Young.
W. H. Young.

איִנהאלט.

§ 1. אריינפירנדיגע באמערקונגען.

זייט

דער רוים, פעסטע קערפער, אויבערפלאכן, פארנעמען 1

§ 2. די גראָדע ליניע.

זייט

קאנסטרועציע פון א גראָדער . 2

קרומע און געצאַקטע ליניעס . 4

צוויי פינטלעך באשטימען א גראָדע 5

דער אפשניט 6

פארלענגערן א גראָדע 6

די אומענדליכע גראָדע 6

די האלבע גראָדע, שטראל .. 7

דער באגריף ווערטיקאל ... 9

§ 3. דער פליין. 10

סימנים פון א פליין 10

ווערטיקאַלער פליין 11

האָריזאנטאַלער פליין 12

קרומע אויבערפלאכן 13

פאַראַלעלעפּיפּעד 16

שניטן פון פליינען 19

§ 4. צילינדער און קאָנוס. 20

§ 5. טיילונג פון א פליין. 23

§ 6. ווינקלען. 24

דעפיניציע פון א ווינקל ... 24

דער שפיץ און די זייטן פון א ווינקל 24

באצייכענונג פון ווינקלען .. 25

אינווייניגסטער און דרויסנדיגער רוים פון א ווינקל 25

מאָדעל פון א ווינקל 26

זעהווינקל 26

§ 7. די באגריפן גלייך, גרעסער און קלענער. 26

גלייכע אפשניטן 26

דער פרינציפ פון באדעקונג .. 27

די באגריפן גרעסער און קלענער 29

זייט

§ 8. דער רינג. 31

זייט

קאנסטרוקציע פון א רינג . . . 31
דער רינג אלס א געאָמעטרישער ארט 32
דרייאונג 32
צענטער, ראדיוס, דיאמעטער . 33
דער ראָד 33
די סימעטריע פון א ראָד . . . 34
מאָדעל פון א קויל מיט מעריד־יאַנען און מיט א עקוואַטאָר 35
צענטער, ראדיוס, דיאמעטער פון אַ קויל 38
דער קויל אלס געאמעטרישער ארט 39
קוואַדראַנטן און אָקטאַנטן פון א קויל 40
דער זייפענער פענכער 40
קאָנגרועגטע רעדער 42
קאנצענטרישע רעדער 43
פארגלייכונג פון רעדער בנוגע זייער שטח 44

§ 9. טיילונג פון א אפשניט.

טיילונג פון א אפשניט אויף העלפט 44
פינטלעך, וואס דעקן זיך ביים קנייטשן 46

§ 10. גלייכע ווינקלען. 47

גלייכע ווינקלען 47
פילפאכיגע ווינקלען 47
זעהווינקל 48
דער געדוכטער דיאמעטער פון דער זון און פון דער לבנה . 49
קאנסטרואירן א ווינקל, וואס איז גלייך א געגעבענעם ווינקל 49
צענטראלע ווינקלען פון א ראד 50
בויגן, כאָרדע, דערגאנצדיגע בויגנס 51

§ 11. טיילונג פון ווינקלען.

טיילונג פון א ווינקל אויף העלפט מיט דער הילף פון א מאָדעל 52
טיילונג פון א ווינקל אויף העלפט אהן דער הילף פון א מאָדעל 54

§ 12. פארגלייכונג פון אומגלייכע ווינקלען.

די באגריפן גרעסער און קלענער בנוגע ווינקלען 55
דרייאונג פון א שטראל. . . . 55
אינאָנהייבדיגע לאַגע. דער זין פון דער דרייאונג. דער זייגער 57
אויסגעפוקלטע און איינגעפאַלענע ווינקלען 57

זייט

§ 13. דער פּערפּענדיקולאַר. 59

אויסקנייטשן א פּערפּדנדיקולאַר	59	שכנישע ווינקלען, אפּגעקערטע ווינקלען	64
דורך יעדן פּינטל איז פאַרהאַן בלויז איין פּערפּענדיקולאַר צו א גראַדער	61	פּינטלעך, וואס דעקן זיך בײַם קנייטשן	65
גראַדע ווינקלען	61	קאַנסטרוקציע פון א פּערפּענדיקולאַר	67
דערגאַנצנדיגע ווינקלען	63	שניידונג פון רעדער	67

§ 14. דער ראָמב. 70

דעפיניציע פון א ראָמב	70	דער שטח פון א ראָמב	71
פּירעק. דיאַגאָנאַלן	70	די קאַנסטרוקציע פון א ראָמב	71
סימעטריע פון א ראָמב	71	די ווינקלען פון א ראָמב	74

§ 15. דער קוואַדראַט. 76

דעפיניציע פון א קוואַדראַט	76	קאַנסטרוקציע פון א קוואַדראַט	78
אויסקנייטשן א קוואַדראַט	76	דער שטח פון א קוואַדראַט	78
סימעטריע פון א קוואַדראַט	77	מאָסן פון שטח	80

§ 16. דער קוב. 82

דעפיניציע פון א קוב	82	מאָדעל פון א פּאָר פּריזמעס	87
מאָדעל פון א קוב	82	דער צענטער פון א קוב	89
ווענטלעך, עקן, קאַנטן פון א קוב	84	סימעטריע פון א קוב	90
דיאַגאָנאַלן פון א קוב	85	מאָדעלן פון פּאַראַלעלעפּיפּעדן, וואס בילדן צוזאמען א קוב	93

§ 17. דער גראָדעק. 94

§ 18. דער פּערפּענדיקולאַר. 95

דער פּערפּענדיקולאַר צו א פלאַך 96

§ 19. גלייכאַקסלדיגע דרייעקן. 97

דעפיניציע און קאַנסטרוקציע פון א גלייכאַקסלדיגן דרייעק	97	דער שטח פון א דרייעק	99
די ווינקלען פון א גלייכאַקסלדיגן דרייעק	99	די סומע פון די ווינקלען אין א גלייכאַקסלדיגן דרייעק	100

זייט

§ 20. גלייכזייטיגע דרייעקן. 100

§ 21. רעגולערער זעקסעקן. 103

§ 22. גלייכאקסלדיגע גראָדווינקלדיגע דרייעקן. 104

§ 23. דער טעטראַעדער. 105

אפשניידן א טעטראַעדער פון דעם עק פון א קוב 105
מאָדעל פון א טעטראַעדער . 106
א קוב מיט אפגעשניטענע עקן 108
דאס שיפעלע 108
דער טאָפעלער טעטראַעדער . 109
דער רעגולערער טעטראַעדער 110
דער רעגולערע טאפעלער טעטראַעדער 113

§ 24. דער דרייעק. 114

גראָדווינקלדיגע, ברייטווינקל־דיגע און שמאָלווינקלדיגע דרייעקן 114
די ווינקלען פון א דרייעק . . 115
די סומע פון די ווינקלען פון א דרייעק 115
די זייטן פון א דרייעק . . . 118
דער שטח פון א דרייעק. . . 120

§ 25. קאנגרוענטע דרייעקן. 120

די תנאים פאר דער קאנגרוענטקייט פון דרייעקן 120
קאנגרוענטקייט און סימעטריע 123

§ 26. פאַראַלעלע גראָדע. 125

די אנטקעגנדיגע זייטן פון א ראָמב 125
דעפיניציע פון פאַראַלעלע . . 126
קאנסטרוקציע פון פאַראַלעלע 127
עס איז פארהאן בלויז איין פאַראַלעלע פון א פינטל צו א גראָדער 129
פאַראַלעלע קאנטן פון א קוב 130
פאַראַלעלע גראָדע און דער פליין 131
פאַראַלעלע צו דערזעלביגער גראָדער 131
אויסגעמיידטע גראָדע 132

§ 27. פאַראַלעלע פליינען. 133

דעפיניציע פון פאַראַלעלע פליינען 133
מאָדעל פון א אפגעהאקטן רעגולערן טעטראַעדער 134

§ 28. דער רעגולערער אָקטאַעדער. 135

זייט

§ 29· די אייגענשאפטן פון פּאַראַלעלע· 139

די ווינקלען צווישן צוויי פּאַראַ־לעלע און א דריטער, שניידנ־דיגער גראָדער 139
די ווינקלען צווישן ניט פּאַראַ־לעלע גראָדע 142
די סומע פון די ווינקלען פון א דרייעק איז גלייך צוויי גראָדע ווינקלען 143

§ 30· דער גראָדווינקלדיגער דרייעק· 144

§ 31· דער שטח פון א גראָדווינקלדיגן דרייעק און פון א גראָדעק· 146

§ 32· פּיטאַגאָראַסעס טעארעמע· 150

§ 33· פּאַראַלעלאָגראַמען· 157

דעפיניציע און אייגנשאפטן פון א פּאַראַלעלאָגראַם . . 157
דער שטח פון פּאַראַלעלאָגראַ־מען און פון דרייעקן . . . 160
צעטיילן א ראָמב אויף צוויי ראָמבען און צוויי פּאַראַ־לעלאָגראַמען 163

§ 34· צונויפגעשפּאַנטע דרייעקן· 164

§ 35· איזאגאנאלע צונויפגעשפּאַנטע, אָדער מיט־גייענדיגע ליעניעס· 166

די סינמעדיאנע 167
די ברייטערע פּיטאַגאָרעאישע טעארעמע 170

אויפגאָבן· 172

אויף דער זייט 69 שור ה 13 פון אונטן דארף מען אנשטאט MA לייענען MD·

אריינפירנדיגע באמערקונגען·

§ 1. רוים, פעסטער קערפער, אויבערפלאַך, פאַרנעם·

ווען דו וועסט זיך ארומקוקן ארום זיך, וועסטו דערזעהען א פולע זאכן: למשל טישן, בענק, שטולן, הייזער, בוימער א·אז·וו· די אלע זאכן זיינען פעסטע קערפער· דער טייל פון א פעסטן קערפער, צו וועלכן דו קענסט צוקומען (למשל מיט די פינגער), ניט צעברעכנדיג דעם חפץ, הייסט זיין אויבערפלאַך· דאס, וואס דו זעהסט, אדער וואס דו בארירסט, איז א טייל פון דעם אויבערפלאַך פונם פעסטן קערפער; ווען דו וועסט א קוק טאן אויף דעם פעסטן קערפער, שטייענדיג אויף אַן אנדער אָרט, פון אַן אנדערן שטאנדפונקט, אדער ווען דו וועסט א דריי טאָן דעם פעסטן קערפער, וועסטו קענען דערזעהען אדער אָנטאַפּן אַן אנדער טייל פון זיין אויבערפלאַך·

יעדער פעסטער קערפער פארנעמט א געוויסן אָרט אין רוים· אין דעם אָרט קענסטו ניט אוועקלייגן אַן אנדער זאַך, ניט ארויסנעמענדיג אַפריהער דעם ערשטן קערפער· דו גופאָ פארנעמסט אויך א געוויסן אָרט אין רוים, און ארום און ארום דיר איז רוים, וואס איז אויסגעפילט טייל־ווייז מיט פעסטע קערפער, טיילווייז מיט לופט· פונקט אזוי פארנעמען די וואלקן איבער דיר און די ערד אונטער דיר א געוויסן אָרט אין רוים, און ווייט איבער די וואלקן פארנעמען די זון, די לבנה און די שטערנס באַשטימטע טיילן פון דעם רוים· צווישן דיר און דער זון איז אויכעט רוים, און אפילו איבער דעם פעלד פון יענע קערפער אויף דעם הימל ציהט זיך אלץ נאָך דער רוים· דו מעגסט זיך פארשטעלן א שטיק רוים, ווי גרויס דו ווילסט, שטענדיג איז דרויסן פון אים אלץ נאך פארהאן רוים· דעריבער זאגן מיר, אז מיר זיינען ארומגענומען פון א אומענדליכן רוים· אין אים לעבן מיר; אין אים ליגן בכלל אלע קערפער, וועלכע מיר קענען·

דו ביסט אפשר געוואוינט צו געבן דעם ווארט פעסט אזא טייטש, וואס שטימט ניט מיט דעם זין, אין וועלכן דאס ווארט איז דאָ באנוצט

געווארן. א שטיק האלץ אדער אייזן וועסטו אפשר אנרופן פעסטער קערפער, אבער וואַסער אדער גאָר א וואלקן וועסטו מסתמא ניט אנרופן אזוי. פאר דער געאמעטריע איז אזא חילוק ניט וויכטיג, זי באטראכט אלע קערפער אזוי, גלייכווי זיי וואלטן געווען פעסטע. ווארום די געאמעטריע פאר־נעמט זיך ניט מיט דער מאטעריע, פון וועלכער דער חפץ באשטייט, נייערט בלויז מיט דער פארם און מיט דער לאגע זיינער, וואס זיי וואלטן דאָך קענען זיין דיזעלביגע, אפילו ווען דער קערפער וואלט באשטאנען פון א גאנץ אנדערער סובסטאנציע. פאַר דער געאמעטריע זיינען אלע אָביעקטן (זאכן) ארום אונז פעסטע קערפער. אזא אָביעקט האט אין יעדער רגע א געוויסע לאגע, א געוויסע פארם, א געוויסן אויבערפלאַך. מיר פאָרשן אטדי אייגנשאפטן פון דעם קערפער, און דערביי אַרן אונז ניט די שינויים, וואס דער קערפער האט דורכגעמאכט אין פריהערדיגע צייטן, אדער וואס ער וועט דורכמאכן אין שפעטערדיגע צייטן. אוודאי איז דאס אויך אינטערעסאנט צו פאָרשן, אבער דאס געהער ניט צו די אויפגאבן פון דער געאמעטריע. די געאמעטריע איז ניט די היסטאריע פון דער וועלט, נייערט בלויז א מיטל, זי צו פארשטיין און צו באקענען זיך מיט איר.

דער אויבערפלאַך פון א קערפער צעטיילט דעם רוים אין צוויי טיילן: אין דעם אינוויינינגסטן רוים, וואס איז ארומגענומען פון דעם אויבער־פלאַך, און אין דעם דרויסנדיגן רוים. מיר גופא געפינען זיך גע־וואוינטליך דרויסן פון דעם אויבערפלאַך פון דער פילקע, פון דעם שטול אדער בכלל פון יעדן אביעקט, וואס מיר זעהען. דער טייל פונם רוים, וואס ווערט ארומגענומען פון דעם אויבערפלאַך פון א געאמעטרישן קערפער, הייסט דער פאַרנעם פון דעם קערפער. דער פאַרנעם פון קערפער איז, בכן, באגרעניצט דורך א אויבערפלאַך.

די גראָדע ליניע.

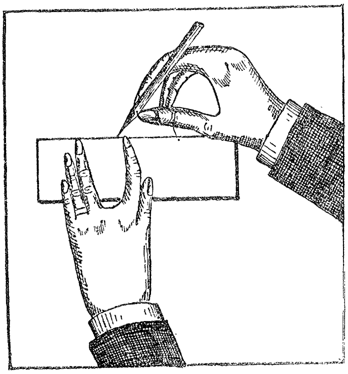
§ 2. קאנסטרוקציע פון א גראָדער ליניע.

נעם א שטיק פאפיר, און קנייטש עס צונויף, אבער מאַך דאס אקוראט, אזוי אז דו זאלסט באקומען א שארפן, גראדן קאַנט. דו וועסט דעמאלט האבן א פאפירענע ווירע.

איצט לייג ארויף דיין פּאפּירענע ווירע אויף א ריינעם בלאט פּאפּיר, נעם א בליישטיפט (זעה אקארשט, ער זאל זיין גאָר שפּיציג) און פיר אים פּאזע דעם קאנט פון דער פּאפּירענער ווירע (זעה פיגור 1).

איצט נעם אוועק די ווירע, און גיב א קוק, וואס דו האָסט געצייכנט: דו האָסט געפירט א גראָדע ליניע.

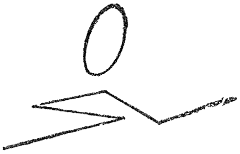
איצט גלעט אויס די פּאפּירענע ווירע. דארטן, וואו ס'איז געווען דער קאנט פון דער ווירע, זעהסטו א גראדען קנייטש. דער קנייטש זעהט אויס פונקט אזוי, ווי די גראָדע ליניע, וואס דו האסט געפירט אויף דעם פּאפּיר, ער איז אפשר א קלייניגקייט ברייטער: דאס קומט פון דער דיק פונם פּאפּיר. נעם א דינערן פּאפּיר, וועט דער קנייטש ניט זיין אזוי ברייט. אויב דער בליישטיפט איז געווען שלעכט געשניצט, וועט אויך די גראָדע ליניע אויסזעהען צו דיק, פאַרשניץ גוט דעם בליישטיפט, וועסטו באקומען א דינערע ליניע. וואס שפּיציגער דער בליישטיפט איז, אלץ בעסער קומט ארויס דאס געמעל פון דער גראָדער ליניע. מיר האבן געוועזט איינגע־קנייטשט דאס בלאט פּאפּיר גראָד־ליניג. אבער מיר קענען פונדעסט־וועגן קיינמאל ניט באקומען קיין אמתע גראָדע ליניע, ניט ווען מיר פירן זי אויף א בלאט פּאפּיר, און ניט ווען מיר מאכן א גראָדליניגן קנייטש. מיר באקומען בלויז א גע־מעל אדער א מאָדעל פון א גראָדער ליניע. אבער דאס געמעל העלפט אונז פארצושטעלן זיך אין די גע־דאנקען א אמתע גראָדע ליניע, דהיינו ווי א בילד פון א בוים דערמאנט אונז, וויאזוי עס זעהט אויס א אמתער בוים; אדער ווי א פאָטאָגראפיע גיט אונז א פארשטעלונג פון דער צורה פון דעם פאָטאָגראפירטן מענש, אפילו ווען מיר קענען אים גאר ניט.


פיג. 1.

דעריבער־איז, ווען איך זאָג דיר: «פיר א גראָדע ליניע», מיין איך, דו זאלסט נעמען דיין ווירע און זאלסט מיט איר הילף שאפן, ווי ווייט מיג־ליך, א גענוי געמעל פון א גראָדער (אנשטאט «גראָדער ליניע» קענען מיר בקיצור זאגן בלויז «גראָדע»). דו וועסט זעהען, אז דאס וועט זיך דיר

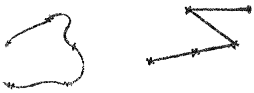
ביסלעכווייז איינגעבן אלץ בעסער און בעסער. אינאנהייב וועט דיין האנט זיין אביסל אומזיכער, די ליניע וועט ניט זיין גלאַט, דו קענסט די אומגלאטקייטן אפמעקן מיט א שטיקל גומי, אבער בכל אופן זיינען די אומגלאטקייטן קיין מניעה ניט, אז דו זאלסט זיך קענען פארשטעלן אין די געדאנקען א אמתע גראָדע אהן שום אומגלאטקייטן. אויך קען זיך טרעפן, אז דיין בליישטיפט איז ניט גענוג שפיציג, דעמאָלט וועט די ליניע זיין צו דיק. פונדעסטוועגן מוזטו זיך קענען פארשטעלן א גראָדע, וואס האט גאר קיין דיק ניט. עס איז א גרויסע פעולה, ווען מען קען זיך פארשטעלן זאכן אין די געדאנקען, ניט זעהענדיג די זאכן. פארמאך אקארשט די אויגן, און פרוב טראכטן א גראָדע, וואס האט א לענג, אבער ניט קיין דיק.

אויף צייכענונגען זיינען שטענדיג פארהאן א פולע ליניעס, אבער דאס רוב זיינען ניט אלע פון זיי גראָדע. ליניעס, וואס מיר קענען ניט אנרופן גראָדע, הייסן קרומע ליניעס, אדער בקיצור קרומע, אויב זיי באשטייען נאר ניט פון לויטער קליינע פארבונדענע שטיקער פון גראָדע ליניעס.



פיג. 2.

דו קענסט אויפצייכענען אזא ליניע, וואס באשטייט פון לויטער גראָדליניגע שטיקלעך, ווען דו פירסט דיין בליישטיפט פאזע דיין ווירע און שטעלסט זיך אפ, און ענדערסט די ריכטונג פון דיין ווירע, און פירסט איצט ווייטער דעם בליישטיפט פון דעם פינטל אָן, אין וועלכן דו האסט זיך געוועזט אפגעשטעלט, א. אז. וו. אזא ליניע רופט מען א געצאַקטע ליניע.

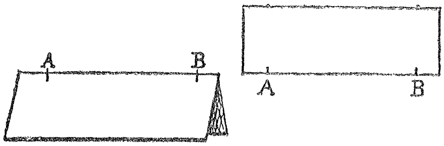


פיג. 3.

א קרומע ליניע קענסטו צייכענען אהן א ווירע, למשל אויסמאלנדיג א גרויסן נול (0). די איינפאכסטע קרומע איז א ריכטיגער קיילעכדיגער «סמך»[1], א רינג. לייג ארויף א קאפיקע אדער אן אנדער מטבע אויפן בלאט פאפיר און פיר דעם בליישטיפט ארום דעם קאַנט, וועסטו באקומען דאס געמעל פון א רינג. ווען דו וועסט אויפצייכענען אויפן פאפיר עטליכע פינטלעך, קענסטו דורכפירן דורך זיי שטענדיג א קרומע ליניע. אבער דורכפירן א גראָדע ליניע דורך עטליכע פינטלעך וועסטו קענען בלויז, ווען

[1]) אין אריגינאל: «א ריכטיגער, קיילעכדיגער נול». אין אונזערע קאנטן שרייבט מען אבער בלויז אוואלע נולן, אין ענגלאנד זעהר אפט אויך קיילעכדיגע.

די פינטלעך וועלן צופעליג ליגן, ווי ס׳געהער צו זיין. דורך צוויי פינטלעך קענסטו שטענדיג פירן א גראָדע, אבער בלויז איינע. פרוב עס. נעם צוויי פינטלעך און רוף זיי אָן A און B (פיגור 4). דו וועסט זעהן, אז עס איז דא בלויז איין שטייגער איינצוקנייטשן דעם פאפיר אזוי, אז אי A אי B זאלן ליגן אויף דעם קנייטש. אטדער קנייטש איז אבער דאס געמעל פון דער גראָדער, וואס ליגט צווישן A און B. דאס אייגענע קענסטו פרובן מיט דיין ווירע. עס זיינען פארהאן צוויי שטייגערס, וויאזוי צו לייגן די ווירע אזוי, אז דער קאנט אירער זאל דורכגיין דורך די פינטלעך A און B. אין איין פאל איז די ווירע נעהנטער צוגערוקט צו דיר, איידער די צוויי פינטלעך, אין דעם צווייטן פאל ליגן די צוויי פינטלעך נעהנטער צו דיר, איידער די ווירע (פיגור 4), אבער ביידע



פיג. 4.

מאל האט דער קאנט פון דער ווירע גענוי דיזעלביגע לאגע, און דיין בליישטיפט לאזט דעמזעלביגן שפור אויף דעם פאפיר. ווען מיר האבן דורך פרובן באשטימט א שטענדיגע, ניט פארענדערליכע אייגנשאפט פון א זאַך (ווי מיר האבן דא למשל באשטימט, אז דורך צוויי פינטלעך קען מען פירן א גראָדע, אבער בלויז איין גראָדע), דעמאלט דריקן מיר אויס דעם רעזולטאט פון אונזערע פאָרשונגען אין א זאץ, וועלכן מען רופט פונדאמענטאלער זאץ אדער אקסיאמע.

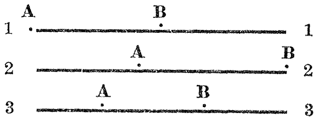
אזוי ארום הייסט דער ערשטער פונדאמענטאלער זאץ אזוי: צוויי פינטלעך באשטימען א גראָדע ליניע, און בלויז איינע. מיט אנדערע ווערטער (שטרענגער): יעדע גראָדע איז פולקום און אין איין זין באשטימט דורך צוויי פינטלעך אירע.[1])

די גראָדע, וועלכע דו האסט געפירט, ענדיגט זיך ניט אין A און ניט אין B. דו קענסט זי מאכן אזוי לאנג, ווי דיין ווירע דערלאָזט, און ווען

[1]) באמערקונג ביים איבערחזרן דעם קורס: ניט אלע פונדאמענטאלע זאצן הייסן אקסיאמעס. אקסיאמעס זיינען אזעלכע פונדאמענטאלע זאצן, וואס דער שכל איז זיי מחייב. פונדאמענטאלע זאצן, וואס דער נסיון איז מחייב זייער ריכטיגקייט, הגם דער שכל מעג דערלאזן אַנדערע סברות, רופט מען פּאָסטולאטן.

דו ווערסט א רוק טאָן דײַן ווירע אזוי׳ אז איר קאַנט זאל ליגן בלויז אויף א טייל פון דער געפּירטער גראָדער און איבער איר אריבער׳ דעמאלט ווערסטו קענען מאכן די גראָדע נאָך לענגער. טאמער וועט ניט קלעקן קיין פּאַפּיר׳ קענסטו צוקלעפּן א צווייט בלאט׳ אויף וועלכן דו ווערסט ווײַטער פירן די גראָדע. ווי לאַנג די גראָדע זאל ניט זײַן אויסגעצויגן׳ ווערסטו זי אַלץ נאָך קענען פאַרלענגערן. דעריבער וועט זײַן ריכטיגער אנצורופן די גראָדע׳ וואס דו האסט אײַנאַנהייב דורכגעפירט׳ א שטיק פון א גראָדער׳ אדער א אָפּשניט פון א גראָדער׳ אדער א גראָד־ליניגער אָפּשניט. וואו מען דאַרף ניט מורא האבן פאַר א טעות׳ וועלן מיר זאגן בקיצור אָפּשניט. ווען מיר וועלן די עקן פון דעם אָפּשניט באַצייכענען מיט A און B׳ וועלן מיר דעם אָפּשניט אנרופן: אָפּ־שניט AB. ווען מען זאגט: די גראָדע AB׳ מיינט מען די גאַנצע אויס־שפּרייטונג אירע; ווען מען זאגט: דער אָפּשניט AB׳ מיינט זײַן אויס־שפּרייטונג בלויז צווישן די צוויי פּינטלעך A און B.

ווען איך זאג: «פאַרבינד A מיט B»׳ אדער «פּיר AB»׳ מיין איך דערמיט: «פּיר דעם אָפּשניט AB». וויל איך׳ אז די גראָדע זאל זײַן לענגער׳ דעמאלט זאג איך: «פאַרלענגער AB». מיר קענען AB פאַרלענגערן איבער A אריבער און איבער B אריבער אדער אין ביידע זײַטן. וויל איך׳ אז דו זאלסט פאַרלענגערן AB איבער B אריבער׳ דעמאלט זאג איך: «פאַרלענגער AB אין דער ריכטונג AB׳ ד׳ ה׳ אין דער ריכטונג פון A צו B און ווײַטער (פיגור [1] 5). וויל איך זי פאַרלענגערן איבער A אריבער׳ דעמאלט זאג איך: «פאַרלענגער AB אין דער ריכטונג BA׳ ד׳ ה׳ פון B צו A און ווײַטער (פיגור [2] 5). ווען איך וויל׳ דו זאלסט פאַרלענגערן AB איבער ביידע עקן אריבער׳ זאג איך: «פאַרלענגער AB אין ביידע ריכטונגען» (פיגור [3] 5). די גראָדע׳ וואס איז באַשטימט דורך די צוויי פּינטלעך A און B׳ איז דער אָפּשניט AB׳ פאַר־לענגערט אין ביידע ריכטונגען׳ אדער׳ ווי מיר זאגן: די אומענדליכע גראָדע.

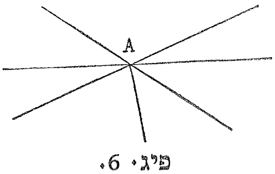


פיג׳ 5׳

אזוי למשל׳ איז פאַרהאַן א גראָדע׳ און בלויז איין גראָדע׳ וואס פאַר־בינדט א פּינטל A אויף דער לבנה מיט א פּינטל B אין דײַן אויג און גייט ווײַטער איבער דיר אריבער פון איין זײַט און איבער דער לבנה אריבער

פון דער אנדערער זייט· הגם קיין איין ווירע גרייכט ניט פון A ביז B, און קיין בליישטיפט קען ניט פירן אטדי גראָדע, פונדעסטוועגן איז פארהאן עפעס, וואס פארבייט דעם בליישטיפט און וואס פירט די גראָדע ליניע אהן א ווירע, דאס איז דהיינו דאס ליכט פון דער לבנה· דאס ליכט קומט פון יעדן פינטל פון דער לבנה אין גראָדע ליניעס; דעריבער קען מען זעהען דאס ליכט פון דער לבנה בלויז דאן, ווען אויף דער גראָדער ליניע צווישן דער לבנה און צווישן דיר איז קיין שום זאַך ניט פאַרהאַן· ווען דו קוקסט אויף דער לבנה, קומט זיין ליכט פּאַזע יענעם אָפשניט, וואס פארבינדט איינעם א פינטל פון דער לבנה מיט איינעם א פינטל אין דיין אויג· אטדער אָפשניט איז ליכטיג, דעם איבעריגער טייל פון דער גראָדער זעהט מען ניט, אבער ער איז פארהאן· ווען דו וועסט אוועקגיין אָנאַזייט פון ליכט, וואס קומט פון דעם אָרט פון דער לבנה, וועט עס באשיינען אויך דעם אָרט אין רוים, וועלכן דו האסט פריהער געהאט פארנומען; די גאנצע גראָדע ליניע וואלט זיין ליכטיג (ווען קיין שום זאַך וואלט ניט געלעגן אויף איר וועג), אחוץ דעם טייל אירן, וואס ליגט פון יענער זייט לבנה· ד· ה· די האלבע ליניע וואלט געווען ליכטיג, די אנדער האלבע — טונקל· אזא האלבע ליניע, וואס גייט ארויס פון א פינטל אין איין ריכטונג און קען געדאכט ווערן פארלענגערט וויפיל מען וויל, רופט מען אָפט א שטראל, פונקט ווי מיר ריידן וועגן א שטראל ליכט (פון דער זון, פון דער לבנה, פון א פלאַם)[1]·

א שטערן זעהט אויס ווי א פינטל, און אלע שטראלן ליכט, וואס קומען פונם שטערן, זיינען גראָדליניגע שטראלן, וואס גייען אלע אַדורך דורך דעם פינטל· דו קענסט זיך דאס אויסמאלן אויף אזא אופן: נעם א שטיק פאפיר, מאַך אויף אים א פינטל און רוף אים אָן A· דורך אטדעם פינטל גייען א פולע שטראלן, וואס בילדן א שטערן אדער, ווי מען זאגט אין דער געאמעטריע, א בינטל שטראלן· עטליכע פון אטדי ליניעס קענסטו


פיג· 6·

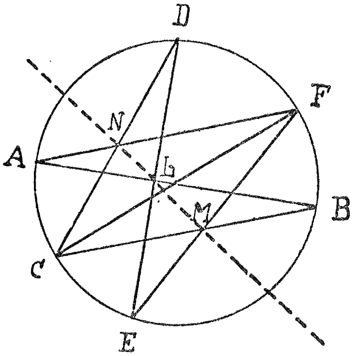
פירן מיט דיין ווירע (פיגור 6), אנדערע ווידער ליגן דרויסן פונם פאפיר, ווי למשל די ליניע, וואס פארבינדט דעם פינטל A מיט דיין אויג· דו

[1]) דעם טיפערן אונטערשייד צווישן «האלבע גראָדע» און «שטראל» קען דער לערער ערקלערן עלטערע שילער (לאַגע און ריכטונג)·

זעהסט, אז צוויי גראָדע ליניעס קענען האבן בלויז איין איינציגן פינטל בשותפות, ווארום צוויי פינטלעך קענען דאָך געהערן בלויז צו איין גראָדער און ניט צו צוויי פארשיידענע גראָדע. ווען צוויי גראָדע גייען אַדורך דורך דעמזעלביגן פינטל A, רופט מען A דעם שניטפינטל. ווען דו וועסט פירן צוויי זיך שניידנדיגע גראָדע, וועסטו האבן א בעסער געמעל פון א פינטל, איידער דאס פינטעלע איז, וואס דו מאכסט מיט דעם בליי־שטיפט. פונקט ווי די אמתע גראָדע ליניע האט בלויז א לענג און האט ניט קיין ברייט, פונקט אזוי האט א אמתער פינטל ניט קיין לענג און ניט קיין ברייט.

איינניטונג.

פיר צוויי פאָר זיך שניידנדיגע גראָדע און פארבינד זייערע שניט־פינטלעך (פרוב דאס אייגענע דורך קנייטשן). ווען דריי פינטלעך A, B און C ליגן אזוי, אז C ליגט אויף דער גראָדע AB, דעמאלט זאגט מען, אז די דריי פינטלעך ליגן אויף איין גראָדער ליניע. דו וועסט שפעטער זעהען, ווי וויכטיג עס איז צו וויסן, צי דריי פינטלעך ליגן אויף איין גראָדער, צי ניט. ווען דו וועסט גלאַט־אין־דער־וועלט נעמען דריי פינט־לעך, קענסטו כמעט זיכער זיין, אז זיי ליגן ניט אויף איין גראָדער, סיידן דו האסט מזל. פראביר דאס אקארשט מיט דער ווירע אדער מיט א קנייטש.



פיג. 7.

איינניטונג (פיג. 7).

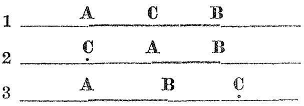
נעם א גרויסע מטבע אדער בעסער א קליינעם טעלער און פיר ארום א רינג. נעם אויפן רינג א פינטל A און א צווייטן פינטל B, וואס זאל ליגן פונקט אנטקעגן A[1]. פאַרבינד A מיט B. נעם אויפן רינג נאך צוויי פינטלעך E און D אויף פארשיידענע זייטן פון AB; נעם איצט א פינטל C

[1]) אן אמתן איז עס אלץ איינס, ווי די זעקס פינטלעך ליגן אויפן רינג, די פינטלעך L, M און N וועלן שטענדיג ליגן אויף א גראָדער (פאסקאַל), אבער, כדי די פיגור זאל זיין קלארער, איז בעסער, ווען AB איז א דיאמעטער.

אויפן רינג צווישן A און E, און א פינטל F אויפן רינג צווישן B און D. פֿאַרבינד D מיט E; דערביי שניידסטו AB אין L. פיר די אָפּשניטן BC און EF; זיי שניידן זיך אין M. איצט פיר CD און AF; זיי שניידן זיך אין N.

איצט קענסטו ווייזן מיט דער ווירע אדער מיט א קנייטש, אז L, M און N ליגן אויף איין גראָדער.

ווען דריי פינטלעך A, B און C ליגן אויף איין גראָדער, קען C ליגן אויף דעם אָפּשניט AB אדער אויף דער פארלענגערונג פון דעם אָפּ־שניט AB איבער A אריבער אדער אויף דער פארלענגערונג פון דעם אָפּשניט AB איבער B אריבער. אין דעם ערשטן פֿאַל (פיג. [1], 8) זאגן מיר: C ליגט צווישן A און B; אין דעם צווייטן פֿאַל (פיג. [2], 8) זאגן מיר: A ליגט צווישן B און C, אין דעם דריטן פֿאַל (פיג. [3], 8): B ליגט צווישן A און C.



פיג. 8.

א אנגעצויגענער שנור, וואס איז באפעסטיגט בלויז אין זיינע ביידע עקן, בילדעט שטענדיג א גראָדע ליניע.

ווען דו וועסט נעמען א שטיק שנור און צובינדן צו איין עק זיינעם א געוויכט און וועסט האלטן דעם שטיק שנור פֿאַרן צווייטן עק, וועט דער שנור ווערן אנגעצויגן און ער וועט הענגען אין א גראָדער ליניע. אָטדי גראָדע ליניע רופט מען א ווערטיקאלע ליניע. ווי דו זאלסט ניט האלטן דעם שנור, וואו דו זאלסט אים ניט האלטן, שטענדיג און אומעטום איז פארהאן בלויז איין לאגע פאר אים, דאס הייסט עס איז פארהאן בלויז איין ווערטיקאלע ליניע. יעדער פינטל באשטימט אין איין זין א ווערטיקאלע ליניע, וואס גייט אדורך דורך אים. ווען דו וועסט נעמען א ארבעס אדער א קערנדל הירז אדער א אנדער זאַך, וואס קען צוגעגליכן ווערן צו א פינטל, און דו וועסט עס לאזן פאלן, וועט עס שטענדיג פאלן אין א ווערטיקאלער ליניע, ביז עס וועט דערגרייכן די ערד. די קאנטן פון א מויער בילדן ווערטיקאלע גראָדע פון דעם פונדאמענט ביזן דאך; די קאנטן פון דעם צימער דאסגלייכן פון דעם בריק ביזן סאָפיט. ווען זיי וואָלטן ניט זיין קיין ווערטיקאלע גראָדע, וואלט דער מויער מסתמא איינגע־פאלן, הגם ער קען בלייבן שטיין, ווען די קאנטן זיינען ווינציג אפגענייגט פון ווערטיקאלע. (אין פיזע למשל איז פארהאן א בארימטער טורים, דער

שרעגער טורים, וואס שטייט ניט גאנץ ווערטיקאל). די וויכטיגסטע זאך, וועגן וועלכער א ארכיטעקטאר מוז טראכטן, איז, אז די ציגלען זאלן גע־לייגט ווערן ווערטיקאל איינער איבער דעם אנדערן, כדי צו זיין זיכער אין דעם, פאַרלאָזט ער זיך ניט אויף זיין אויג, נייערט ער באנוצט א שנור, וואס איז באשווערט מיט א געוויכט. אזא שנור רופט מען א לאָט. ער האלט אים אין דער האנט אזוי, אז דאס געוויכט זאל קוים־קוים בארירן די וואנט. ווען דער שנור הענגט געגוי פאַזע דער וואנד, אזוי אז דער בלויז צווישן אים און דער וואנט איז אומעטום גלייך און ניט גרעסער, איידער די ברייט פון דעם געוויכט, הייסט עס, אז די ציגלען זיינען אוועקגעלייגט ווערטיקאל איינער אויפן אנדערן; טאמער ניט, מוז מען איבערלייגען די ציגלען, אניט וועט דער מויער איינפאלן.

דער פליין.

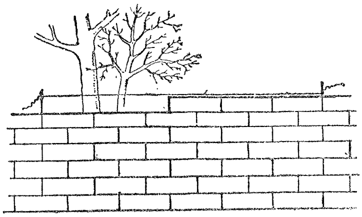
§ 3. ווי אזוי באקומט מען א פליין?

דער פלאַך פונם פאפיר, אויף וועלכן דו האסט געפירט די גראָדע ליניעס, רופט מען א פלייניגן פלאך, אדער בקיצור א פליין. נאך גענויער זאגט מען, אז עס איז א שטיק, אדער א טייל פון א פליין, פונקט אזוי ווי די ליניע, וואס דו האסט געפירט, איז א טייל פון דער גאנצער אומענדליכער גראָדער. יעדער שטיק פון א פליין קען פארגרעסערט ווערן ניט בלויז אין איין ריכטונג, ווי א שטראַל, אדער אין צוויי ריכטונגען, ווי א גאנצע גראָדע, נייערט אין דער ריכטונג פון יעטוועדן שטיק פון א גראָדער, וואס ליגט אויף דעם פליין. ווארום דער פליין האט די וויכטיגע אייגנשאפט, אז יעדע גראָדע, וואס האט צוויי פינטלעך בשותפות מיטן פליין, ליגט אינ־גאנצן אויף דעם פליין.

דו קענסט פארגרעסערן דיין פליין, צוקלעפנדיג א צווייטן שטיק פאפיר צו דעם ערשטן, און דו וועסט דעמאלט באקומען א גרעסערן שטיק פליין (אויף די אומגלאטקייטן וועלן מיר ניט אכט געבן). דו קענסט נעמען דאס בלאט פאפיר אין די הענט און אים האלטן אין פארשיידענע לאַגעס. דעמאלט וועט עס פאָרשטעלן שטיקער פון גאנץ פארשיידענע פליינען, וואס יעט־וועדע פון זיי האט א באשטימטע לאגע אינם רוים. דער בריק פונם צימער איז א גרויסער שטיק פליין, וועלכן דו קענסט זיך לייכט פאָרשטעלן. די

ווענט זיינען שטיקער פון אנדערע פליינען. דער דאך און די ווענט פון דעם הויז זיינען ווייטער שטיקער פון אנדערע פליינען, וואס יעדע פון זיי האָט א באשטימטע לאַגע אין דעם רוים. דו קענסט זיך פארשטעלן, אז יעדער פון די פליינען איז אזוי ווייט פארלענגערט, אז יעדע גראָדע, וואס מען קען אוועקלייגן אויף אים, ציהט זיך אויס אויף אים אין דער גאנצער לענג אירער.

ווען דו וועסט זיך צוקוקן, ווי א מוליאר בויט א גראָדע וואנט, וועסטו ערשטנס זעהען, ווי מיר האבן שוין פריהער געלערנט, אז קודם־כל פלייסט ער זיך צו לייגן די ציגלען ווערטיקאל איינעם איבער דעם אנדערן, באנוצנדיג דערצו דעם לאָט; דעמאלט וועט דער אויבערפלאך פון דער וואנט אנטהאלטן אלע ווערטיקאלע גראָדע, וואס גייען אדורך דורך יעדן פינטל אירן. אבער דאס קלעקט נאך ניט, אז די וואנט זאל זיין פלייניג. די ווענט פון א קיילעכדיגן טורים קענען זיין געבויט אויך אזוי, אבער זיי זיינען פאָרט ניט פלייניג. דערצו דארף דער מוליאר האבן א צווייטן שנור, א האריזאנטאל אנגעצויגענעם, וועלכן ער באפעסטיגט אין דער ריכטונג פון דער ברייט פון דער וואַנט אין צוויי ערטער. פאזע אטדעם שנור לייגט ער די ציגלען (פיג. 9). וואס העכער די וואנט ווערט, אלץ העכער באפעסטיגט ער דעם צווייטן שנור. ער זעהט, אז דער שנור זאל זיין שטייף אנגעצויגן און ליגן פאַזע דער



פיג. 9.

ברייט פון דער וואנט, כדי צו לייגן די ציגלען אין אזא סדר, אז די וואַנט זאל פון ביידע זייטן האבן פלייניגע אויבערפלאכן; ווייס, אז א אנגעצויגענער שנור גיט שטענדיג א גראָדע ליניע. אויב דער שנור ליגט ניט אומעטום געדיכט אויף דער וואנט, איז די וואנט ניט פלייניג, הגם זי אנטהאלט אלע ווערטיקאלע ליניעס, ווי דאָס ווייזט דער לאָט. אבער ווען דער אנגעצויגענער שנור ליגט געדיכט אויף דער וואנט, קענסטו זיין זיכער, אז יעטוועדער שנור, וואס מען וועט אנציהען צווישן צוויי וואָסער ניט איז פינטלעך פון דער וואנט, וועט אויכעט ליגן פלאַך אויף איר, און דעריבער איז דער אויבערפלאך פון דער וואנט א פליין. אזא פליין רופט מען ווערטיקאלער פליין.

דעפיניציע. א ווערטיקאלער פליין איז א פליין, וואס אנטהאלט א ווערטיקאלע ליניע.

ווי דו זעהסט, זאגן מיר ניט: א ווערטיקאלער פליין אנטהאלט יעדע, וועלכע מען וויל נאָר, צאל ווערטיקאלע ליניעס. דאס איז ניט נויטיג. ווארום א פליין, וואס אנטהאלט בלויז איין ווערטיקאלע ליניע, אנטהאלט שוין ממילא אלע ווערטיקאלע ליניעס, וואס גייען אַדורך דורך זיינע פינט־לעך. אין א דעפיניציע זאגן מיר בלויז אזויפיל, וויפיל עס איז נויטיג, אבער מערער ניט.

(דעפיניציע. דעפינירן הייסט: ערקלערן א באגריף, א ווייניגער באקאנטן, דורך א צווייטן, א מער באַקאַנטן).

דורך יעדער ווערטיקאלער גראָדער גייען דורך א פולע, וויפיל מען וויל נאר, ווערטיקאלע פליינען.

נעם אויף א בלאט פאפיר א פינטל A און פיר אדורך דורך אים (פיג. 6) גראָדע ליניעס; נעם אן אנדער בלאט און האלט עס ווערטיקאל אזוי, אז עס זאל דורכגיין דורך A. דעמאלט וועט דער אויבערפלאך פונם צווייטן בלאט אנטהאלטן די ווערטיקאלע ליניע דורך A. דו קענסט איצט דרייען דאס בלאט פאפיר ארום אָטדער ווערטיקאלער ליניע אזוי, אז עס וועט כסדר ליגן אויף אלע יענע גראָדע, וואס דו האסט אויף דעם ערשטן בלאט פאפיר געפירט. דו זעהסט, אז **צו יעדער גראָדער דורך A אויף דעם ערשטן בלאט פאפיר געהער א ווערטיקאלער פליין דורך A, און בלויז אייגער אזעלכער, וואס אנטהאלט די גראָדע.**

ווען דו וועסט נעמען א טעלער מיט וואסער און ארויפלייגן אויף אים זאַכט דאס ערשטע בלאט פאפיר, אויף וועלכן דו האסט געפירט די גראָדע, וועט זיין אויבערפלאַך זיין א האָריזאנטאלער פליין, און יענע גראָדע וועלן זיין האָריזאנטאלע ליניעס. די ווערטיקאלע ליניעס און די ווערטי־קאלע פליינען האבן מיר באשטימט מיט א לאָט; אויף צו באשטימען האריזאנטאלע ליניעס און פליינען באנוצן מיר וואסער אדער אן אנדער פליסיגקייט.

דער אויבערפלאַך פון רוהיגע וואסער איז א האריזאנטאלער פליין.

דער אויבערפלאך פון א טיש דארף זיין א האריזאנטאלער פליין, אזוי אז דער אויבערפלאך פון דיין בלאט פאפיר דארף אויכעט זיין א האריזאנ־טאלער פליין, ווען דו לייגסט עס ארויף אויפן טיש. כדי צו זעהען, צי איז טאקע דער טאָוול פונם טיש א האריזאנטאלער פליין, שטעל ארויף אויפן טיש א פלאכע טעסל מיט וואסער. ווען דאס וואסער אין דער

טעסל איז אומעטום גלייך טיף, דעמאלט איז דער טאָוול האָריזאָנטאל. ווען דו ווערסט א טראָפּן וואסער (אדער בעסער קוועקזילבער) זאַכט אראָפּלאזן אויף א האריזאנטאלן טיש, וועט דער טראָפּן ניט ארונטערריגען. טאמער איז דער טיש ניט האריזאנטאל, וועט דער טראָפּן ארונטערריגען צו דער נידעריגערער זייט פון דעם טיש.

דער בריק און דער סאָפיט פון דעם צימער זיינען (אָדער דארפן זיין) האריזאנטאלע פליינען; די ווענט פינם צימער זיינען (אָדער דארפן זיין) ווערטיקאלע פליינען.

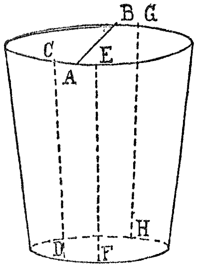
דו זעהסט, אז האריזאנטאלע פליינען ווערן באשטימט מיט דער הילף פון וואסער אדער פון אן אנדער פליסיגקייט, הגם מיר האבן פריהער געהאט געזאגט, אז אין דער געאמעטריע פרעגן מיר ניט, פון וואס פאר א מאטעריע די זאכן באשטייען. די באגריפן האריזאטאל און ווערטיקאל זיינען טאקע ניט נויטיג פאר דער געאמעטריע, אבער מען קען זיי מיט זעהר א גרויסער פעולה באנוצן פאר א סך דערקלערונגען, פונקט ווי די באגריפן רעכטס און לינקס, וואס מיר וועלן זיי אפט באנוצן, הגם זיי זיינען ניט דורכויס נויטיג פאר דער געאמעטריע. די באגריפן רעכטס און לינקס, וואס דו ווייסט זיי שוין לאַנג, דריקן אויס א באציהונג צו דיין אייגענעם קערפער. די באגריפן האריזאנטאל און ווערטיקאל דריקן אויס א באציהונג צו דער ערד, אויף וועלכער מיר גייען אַרום; זיי דריקן אויס די לאַגע פון די זאכן בנוגע דער ערד, פונקט אזוי ווי די באגריפן רעכטס און לינקס באשטימען די לאַגע פון די זאכן בנוגע אונזער קערפער.

דו קענסט א פולע זאכן, וואס זייערע אויבערפלאכן זיינען ניט קיין פליינען. דער אויבערפלאך פון א פילקע אדער פון א טאָפּ איז ניט קיין פליין. אויף א פילקע קענסטו ניט פירן קיין איין גראָדע ליניע. ווען דו ווערסט אויף איר אויבערפלאַך נעמען צוויי פינטלעך A און B, וועט די גראָדע AB דורכגיין דורך דער פילקע אינווייניג, און זי וועט ניט ליגן אויף דעם אויבערפלאַך. ווען דו ווערסט די פילקע צעשניידן, פירנדיג דעם שניט דורך דער גראָדער AB, וועט די פילקע צע־פאלן אין צוויי העלפטן (פיג. 10a). אויב די פילקע איז געווען פוסט, ווי למשל א גומענע פילקע, ווערסטו נאָכן צעשניידן, חוץ דעם

פיג. 10a.

דרויסנדיגן אויסגעפוקלטן אויבערפלאַך, וועלכן דו האסט שוין פריהער געזעהען, דערזעהען א צווייטן, אינווייניגסטן, איינגעפאלענעם אויבער־

פלאך· די איינגעפאלענע אויבערפלאַכן פוןביידע העלפטן האבן, איידער דו האסט די פילקע צעשניטן, געוועזט געבילדעט א טייל פונם גאנצן אויבערפלאַך פון דער פילקע, אבער מיר האבן אטדעם טייל ניט געקענט זעהען אדער בארירן· אזא טייל פון דער פילקע, מיט א איינגעפאלענעם אויבערפלאַך, איז אַ קערפער, וועלכן מען רופט «שיסל»; ווען א פילקע האט בלויז א אויסגעפוקלטן אויבערפלאַך, דאס הייסט זי איז ניט פוסט אינוויייניג, ווי למשט א קניידל, רופט מען ביידע העלפטן אירע האלבע קוילן אדער העמיספערעס· ביידע האבן אינוויייניג א פלאכן אויבערפלאַך, וואס אויף אים ליגט די גראָדע AB· אטדער אויבערפלאַך איז א פליין· כל זמן ביידע האלבע קוילן זיינען ניט אפגעטיילט איינער פון דעם אנדערן, ליגן ביידע פלאַכע אויבערפאַלכן אין איינעם און דעמזעלביגן פליין· אבער ווען מיר מאכן דעם שניט און נעמען אראָפּ איין האלבן קויל פון דעם אנדערן, פארנעמט זיין פלאַכער אויבערפלאַך א נייע לאגע: ער קען אַלצנאָך זיין א טייל פון דעמזעלביגן פליין, וואס פריהער, אבער ער קען אויך ליגן אויף א גאנץ אנדערן פליין·



פיג· 10b·

דעם אויסגעפוקלטן אויבערפלאַך פון א געוואוינ־ליכער פילקע רופט מען קויל אדער ספערע[1]· עס זיינען כידוע פאַרהאן פילקעס, וואס האבן בלויז אן ערך די פארם פון א קויל, למשל א פוטבאָל, אדער א פּאָמעראַנץ·

אויף דעם אויבערפלאַך פון א בלומענטאָפּ קענסטו פירן גראָדע ליניעס, זיי גייען ארויפצו אדער אראָפּצו, און זיי זיינען די איינציגע גראָדע אויף אטדעם קרומען אויבערפלאַך (פיג· 10b)· ווען דו וועסט אויפן אויבערפלאך פון דעם בלומענטאָפּ נעמען צוויי פינטלעך, וואס ליגן ניט אויף אזא גראָדער, וועט די גראָדע, וואס פארבינדט זיי דורכגיין אינוויייניג דורך דעם טאָפּ·

א אויבערפלאַך איז יענער טייל פון א קערפער, וואס יעדן פינטל זיינעם קענען מיר צורוקן צו פינטלעך פון אנדערע קערפער· שטעל זיך פאָר א פינטל אינוויייניג אין א פּאָמעראַנץ· אלע פינטלעך, וואס ליגן נאהנט ארום אים, זיינען אויך פינטלעך פון דעם פּאָמעראַנץ· ווען דו וועסט אבער

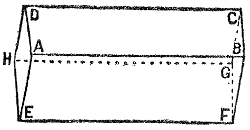
[1]) קויל הייסט אייגנטליך די פילקע גופא; איר אויסגעפוקלטן אויבערפלאַך רופט מען ספערע· ווען מען דארף ניט מורא האבן פאר א טעות, זאגט מען אויך אנשטאט ספערע – קויל·

נעמען א פינטל אויף דער געלער שאָלאַכץ פון דרויסן, ליגט שוין אטדער פינטל (און א סך פינטלעך ארום אים) אין דער לופט, אדער זיי ליגן אויף דעם פינגער, ווען דו באַרירסט מיט אים יענעם פינטל אויף דער שאָלאַכץ. די געלע שאָלאַכץ פון דעם אפעלסין באטייט פאר דיר דעם אויבערפלאַך פון דעם אפעלסין. די געלע שאָלאַכץ פונם אפעלסין האָט פונדעסטוועגן אין אמתן א געוויסע דיק, פונקט ווי דיין בויגן פאפיר האט אויכעט א געוויסע דיק; אבער דער אויבערפלאַך האָט לחלוטין קיין שום דיק ניט. בלויז דער דרויסנדיגער פלאַך פון דער געלער שאָלאַכץ איז דער אויבערפלאַך, און ער האָט אקוראט דיזעלביגע לאגע, ווי דער ארומנעמענדיגער פלאַך פון דער לופט, וואס באַרירט דעם אפעלסין פון אלע זייטן. ליאַד וועלכע צוויי קערפער, וואס זיינען צוגעפרעסט איינער צום אנדערן פונקט אזוי, ווי דער אפעלסין און די לופט, האבן דאָרטן, וואו זיי באַרירן זיך, דעמזעלביגן אויבערפלאַך. אזוי למשל, איז דער אויבערפלאַך פון א טייך פאראיינס אויך דער אויבערפלאַך פון דער לופט איבער אים און פון דער ערד אונטער אים. ווען דו קוקסט אויף וואָס פאר ניט איז קערפער, למשל אויף א ליכטל, זעהסטו בלויז א טייל פון זיין אויבערפלאַך, ווייל דו קענסט זעהען דורך דער לופט, אבער ניט דורך דעם ליכטל גופא. ווען דו קוקסט אויף א גלעזערנעם חפץ, קענסטו דעם אויבערפלאַך ניט אזוי לייכט דערקענען, ווייל גלאָז איז דורכזיכטיג, אבער דו קענסט גאנץ געטרי פילן דעם אויבערפלאַך. ביי א גלעזערנעם חפץ קענסטו זעהען דאס אינוויינינגסטע אויכעט, ביי א ליכטל ניט; ביי ביידע קענסטו עס ניט פילן; אבער דו ווייסט גאנץ זיכער, אז עס איז בנמצא, און אזי, ווען דו וועסט צעברעכן דאס גלאָז, וועסטו דערזעהען די פינטלעך, וואס זיינען פריהער געווען אינוויינינג. אלע זאכן ארום אונז זיינען[1]) פעסטע קערפער, דאָס הייסט: זיי האבן ניט בלויז אן אויבערפלאַך, נייערט אויך א תוכן (אינהאלט).

אָפטמאָל האבן זיי אויבערפלאַכן, וועלכע מיר קענען ניט זעהען, ניט צעשניידנדיג דעם קערפער, ווי למשל די גומענע פילקע. אזעלכע קערפער רופט מען פוסטע קערפער; אָפטמאָל קענען מיר אויך ביי פוסטע קערפער זעהען זייער גאנצן אויבערפלאַך, למשל ביי א גלעזערנעם באַלאָן, וואס איז אנגעפילט מיט געפארבטע וואסער. דאס, וואס מיר רופן פוסט, איז נוגע בלויז דער פארם פון זיין אויבערפלאַך. ווארום אלע קערפער, וואס מיר זעהען ארום אונז, צי זיי זיינען פוסט צי ניט, זיינען

[1]) געאמעטריש.

פעסטע קערפער· א ב לאַ ט פאפיר איז א פעסטער קערפער, און האט א אויבערפלאַך, וואס באשטייט פון ביידע פלאכע זייטן, אויף וועלכע דו שרייבסט· זיי זיינען טיילן פון פארשיידענע פליינען, הגם זיי ליגן זעהר נאהנט איינער לעבן דעם אנדערן· אבער צו דעם אויבערפלאַך פונם בלאַט פאפיר געהערן אויך די שמאָלע פלאכן פון די רענדער· די פארמפונם פאפיר איז דיזעלביגע ווי פון א גאנץ־גאנץ דינעם ציגל, אדער פון א ברעט· אויך א געוואוינליך שטיק געלע זייף האט אזא פאָרם· אטדי פאָרם רופט מען גראָדעקיגער[1]) פאַראַלעלעפּיפּעֶד אדער באַלקן· זיין אויבערפלאַך באשטייט פון שטיקער פון עטליכע פליינען, וואס זיינען צוגערוקט איינער צום אנדערן, און מען רופט זיי די ווענטלעך פונם פאראלעלעפּיפּעֶד· וויפיל ווענטלעך האט ער? איין אויבערשטע, איין אונטערשטע און פיר זייטיגע ווענטלעך, צוזאמען זעקס· די אויבערשטע ווענטל שניידט זיך, ווי דו זעהסט, מיט דער פאדערשטער ווענטל אין דעם אזויגערופענעם קאַנט· וואס איז דאס אזוינס דער קאַנט? דאס איז א גראָדע ליניע, אדער, ריכטיגער געזאגט, א גראָדליניגער אָפשניט, אַ טייל פון א גראָדער ליניע· דער קאַנט האט צוויי עקן; מיר וועלן זיי באצייכענען מיט A און B, ווי פריהער; דעמאלט וועט דער קאַנט הייסן AB· וועלכע אנדערע קאנטן זעהען מיר נאך אויף דער אויבערשטער ווענטל פונם פאַראַלעלעפּיפּעֶד? דאָ איז דער קאַנט, אין וועלכן די אויבערשטע ווענטל טרעפט זיך מיט דער הינטערשטער ווענטל; לאמיר זיינע עקן אנרופן C און D, דער קאַנט הייסט CD· דא איז ווייטער דער קאַנט, אין וועלכן די אויבערשטע ווענטל טרעפט זיך מיט דער לינקער ווענטל פונם פאַראַלעלעפּיפּעֶד· איין עק אירער ליגט אין A, דער צווייטער אין D, דאס איז בכן דער קאַנט AD· דער קאַנט, אין וועלכן די אויבערשטע ווענטל שניידט זיך מיט דער רעכטער ווענטל, הייסט BC· דאס זיינען אלע אויבערשטע קאַנטן פונם פאַראַלעלעפּיפּעֶד, וואס די פיר עקן זייערע זיינען A, B, C און D· אין A שניידט זיך די אויבערשטע ווענטל מיט דער פאדערשטער און מיט דער לינקער ווענטל, בכן שניידן זיך דריי ווענטלעך אין דעם איין עק· די אויבערשטע ווענטל שניידט דורך איינע



פיג· 11·

[1]) אין אָריגינאַל ווערט ווייטער באנוצט בלויז דאס ווארט «באַלקן», מחמת דער גריכישער טערמין איז צו שווער·

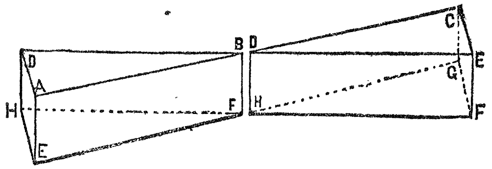
פון די זייטיגע ווענטלעך, דהיינו די פאדערשטע אין דער גראָדער AB און די אנדערע אין דער גראָדע AD. אטדיביידע גראָדע האבן, ווי מיר ווייסן, בלויז איין שניטפינטל, דאס איז טאקע דער פינטל A. עס איז אבער דא נאך א דריטער קאַנט, וואס גייט אויך אַדורך דורך A, אבער ער ליגט ניט אויף איין פליין מיט יענע ביידע. ער געהער אויך ניט צו דער אויבערשטער ווענטל פונם פאַראַלעלעפּיפּעד, דאס איז דער קאַנט, אין וועלכן עס טרעפן זיך די פאדערשטע און די לינקע ווענטל. איין עק אירער איז A, דעם אנדערן לאמיר אנרופן E. די דריי קאַנטן AE, AB און AD שניידן זיך אין A, זיי זיינען שטראלן פון דעם שטערן A, אדער פון דעם «בינטל שטראלן» A. זיי ליגן פּאָרוויַיז אויף איין פליין, בעת דער דריטער שטראל ליגט דרויסן פון דעם פליין. ווען מיר וועלן די איבעריגע עקן, וואס ליגן אויף דער אונטערשטער ווענטל פונם פאַראַלעלעפּיפּעד, אנרופן F, G, H, וועלן מיר האבן אנגערופן אלע עקן. וויפיל עקן האבן מיר צוזאמען? אַכט: A, B, C, D, E, F, G, H — צו איין עק אין יעדן ווינקל פונם פאַראַלעלעפּיפּעד. איצט טו אקארשט א צייל די קאַנטן פונם פאַראַלעלעפּיפּעד. אט זיינען זיי: פיר אויבן, פיר אונטן, און נאָך פיר, וואס גייען פון אויבן אויף אונטן. צוזאמען צוועלף, דהיינו: AB, BC, CD, DA און EF, FG, GH, HE, און AE, BF, CG, DH. ווען דו וועסט צוגעבן די צאל פון די עקן צו דער צאל פון די ווענטלעך, וויפיל וועט דאס אויסמאכן? 14 = 6 + 8. מיט וויפיל איז דאס מער ווי די צאל פון די קאַנטן? מיט 2! 14 = 2 + 12.

עקן	8	קאַנטן	12
ווענטלעך	6		2
	14		14

איך וועל דיר שפּעטער נאך מער דערציילן וועגן דעם.

די קאַנטן זיינען ניט די איינציגע גראָדע, וואס מיר קענען פירן אויף דעם אויבערפלאַך פון א פאַראַלעלעפּיפּעד, פארבינדנדיג צוויי עקן זיינע. אויף דער אויבערשטער ווענטל קענען מיר פארבינדן A און C. די גראָדע AC איז ניט קיין קאַנט, פונקט אזוי ווי די גראָדע BD איז עס ניט, אבער זיי ליגן אויף דער אויבערשטער ווענטל פונם פאַראַלעלעפּיפּעד און פאר־בינדן צוויי עקן. אויף יעטוועדער ווענטל פונם פאַראַלעלעפּיפּעד זיינען פארהאן צו צוויי אזוינע ליניעס, מען רופט זיי דיאַגאָנאַלן פון די ווענטלעך.

וויפיל אזעלכע דיאַגאָנאַלן איז פאַרהאַן? זעקס מאל צוויי, דאס הייסט 12. עס זיינען פאַרהאַן נאך מער גראָדע, וואס פאַרבינדן צוויי עקן, חוץ די 12 קאַנטן און די 12 דיאַגאָנאַלן פון די ווענטלעך. אבער זיי ליגן ניט אויפן אויבערפלאַך פון דעם פאַראַלעלעפּיפּעד, נייערט אינווייניג אין אים. זיי הייסן קערפּערליכע דיאַגאָנאַלן פון דעם פאַראַלעלעפּיפּעד. עס זיינען פאַרהאַן 4 אזעלכע: AG, BH, DF און CE. איך קען דיר ווייזן די ליניע DF, ווען איך וועל ארויפלייגן א מעסער אויף דעם דיאַגאָנאַל DB און דורכשניידן דאס שטיקל זייף דורך די קאַנטן BF און DH (פיג. 12).



פיג. 12.

אצונד קענסטו זעהען אלע גראָדע, וואס פאַרבינדן צוויי עקן. צייל אקאָרשט, וויפיל גראָדע גייען אַדורך דורך דעם עק A. עס מוזן זיין 7 אזעלכע גראָדע, ווייל עס זיינען פאַרהאַן נאָך 7 אנדערע עקן. אָט זיינען זיי:

AB — א קאַנט.
AC — א דיאַגאָנאַל פון דער אויבערשטער ווענטל.
AD — א קאַנט.
AE — א קאַנט.
AF — א דיאַגאָנאַל פון דער פאָדערשטער ווענטל.
AG — א קערפּערליכער דיאַגאָנאַל פונם פאַראַלעלעפּיפּעד.
AH — א דיאַגאָנאַל פון דער לינקער ווענטל.

אויף דעמזעלביגן אופן קענסטו צונויפשטעלן די גראָדע, וואס גייען אַדורך אנדערע עקן.

קודם־כל־דבר מוזטו געדענקען צוויי זאַכן:

צוויי ווענטלעך, וואס שניידן זיך, האבען איין גראָדע ליניע בשותּפות.

דריי ווענטלעך, וואס שניידן זיך, האבען איין פּינקטל בשותּפות.

דאס מוזטו גוט באהאלטן אין דיין זכרון, ווארום דער כלל בלייבט שטענדיג א כלל פאַר יעטוועדע צוויי פליינען און פאַר יעטוועדע דריי פליינען.

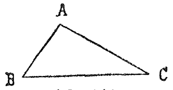
צוויי זיך שניידנדיגע פליינען האבן איין בשותפותדיגע גראָדע׳ וואס הייסט זייער שניטליניע·

דריי פליינען׳ וואס שניידן זיך פאָרוויז׳ און וואס גייען ניט אַדורך אלע דריי דורך איין גראָדער׳ האבן איין בשותפותדיגן פינטל׳ וואס הייסט זייער שניטפונטל·

יעדן עק האבן מיר באצייכנט מיט איין אות און יעדן קאַנט מיט צוויי אותיות; ווי וועלן מיר איצט באצייכענען די ווענטלעך? מיר וועלן זיי באצייכענען מיר פיר אותיות׳ דהיינו מיט די אותיות פון די 4 עקן זייערע· די אויבערשטע ווענטל למשל וועט מוזן הייסן ABCD· אבער מיר האבן גאר ניט נויטיג אזוי פיל אותיות׳ עס קלעקן דריי אותיות· ABC איז דער פליין׳ וואס גייט אַדורך דורך די דריי פינטלעך A׳ B און C; דאס איז דער פליין פון דער אויבערשטער ווענטל און ער גייט אַדורך דורך D· מיר קענען אים אנרופן אויף פארשיידענע אופנים׳ ABC׳ אדער ABD׳ אדער BCD· יעטוועדע פון אטדי גרופעס׳ צו דריי פינטלעך אין יעדער גרופע׳ באשטימט דעם פליין׳ וואס גייט אַדורך דורך זיי: דעם פליין׳ אין וועלכן עס ליגט די אויבערשטע ווענטל פונם פאַראַלעלעפּיפּעד׳ צום אונטערשייד פון אלע אנדערע ווענטלעך·

דאס איז חל ניט בלויז אויף דער אויבערשטער ווענטל פונם באַלקן׳ נייערט אויף ליאַד וועלכע פינטלעך און פליינען· ווען מיר נעמען א גראָדע AB און א פינטל C ניט אויף דערזעלביגער גראָדער׳ איז פאראן א פליין׳ און בלויז איינער אזעלכער׳ וואס אנטהאלט די גראָדע און דעם פינטל· דאס איז דער פליין ABC (פיג׳ 13)·

מאל זיך אויס׳ אז דיין בלאַט פאפיר (אדער א אנדערער ליאַד וועלכער פליין) איז אוועקגעלייגט אזוי׳ אז איין קאַנט פונם בלאַט פאלט צונויף מיט AB· איצט לאמיר אזוי לאנג דרייען דאס בלאַט ארום AB׳ ביז עס וועט דורכגיין דורך C· דעמאלט וועט דער פליין (פונם בלאַט) אנטהאלטן יעטוועדע גראָדע בכלל׳ וואס פארבינדט C מיט וואס פאר ניט איז פינטל



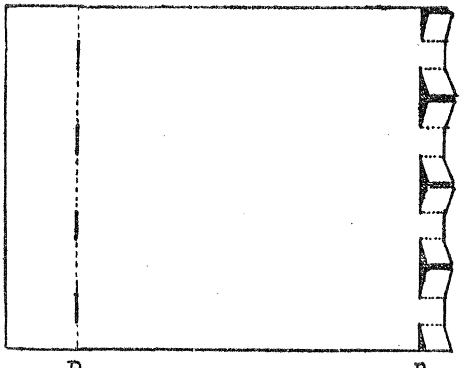
פיג׳ 13·

פון AB׳ און די גראָדע AB׳ AC׳ BC בפרט· דערפון האבן מיר א ראיה׳ אז עס איז ניט מיגליך קיין צווייטער פליין דורך דער גראָדער AB און דעם פינטל C׳ ווארום׳ ווען אזא צווייטער פליין וואלט געווען׳ וואלט ער געהאט מער ווי איין גראָדע בשותפות מיט א אנדער פליין· פונקט

אזוי איז פארהאן בלויז איין פליין דורך די פינטלעך A, B און C; און עס איז פארהאן בלויז איין פליין דורך צוויי זיך שניידנדיגע גראָדע AB און AC.

§ 4. דער צילינדער און דער קאָנוס.

דערמאָן זיך, אז מיר האבן געקענט פירן א גראָדע ליניע ניט בלויז אויף א אויבערפלאַך, וואס באשטייט פון טיילן פון א פליין, נייערט אויך אויפן אויבערפלאַך פון א בלומענטאָפּ; דו קענסט, למשל, פירן גראָדע

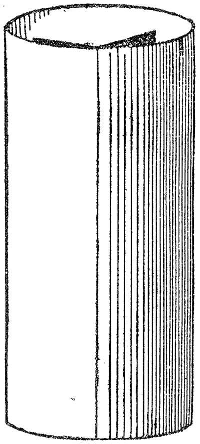


פיג. 14.

ליניעס אויך אויף אזעלכע אויבערפלאַכן, וואס זעהען אויס, ווי די צי־לינדערס פון לאָמפּן. אזא אויבערפלאַך הייסט צילינדער. א אויבער־פלאַך פון א בלומענטאָפּ, הייסט קאָנוס, אדער, ריכטיגער געזאגט, איז דער ערשטער אויבערפלאַך א טייל פון א צילינדער, דער צווייטער א טייל פון א קאָנוס, ווארום א צילינדער און א קאָנוס זיינען, ווי א פליין, אומענדליכע אויבערפלאַכן.

קאָנסטרוקציע פון א צילינדער. נעם א שטיק פאפיר, גיב א קוק, צי האט ער א גראָדן קאַנט; טאמער ניט, קנייטש אויס א גראָדן קאַנט BD. איצט דריי אום דאס בלאַט, און בייג עס איין פון לינקס אזוי, אז א קליין שטיקל פונם קאַנט BD זאל אקוראט צונויפפאלן מיט דעם

איבעריגן קאַנט, און קנייטש איין דעם בייג, ווערסטו אויסקנייטשן די גראָדע AB (פיג׳ 14). פונקט אזוי קנייטש אויס די גראָדע CD פון רעכטס. איצט מוזן מיר פארהעפטן AB מיט CD. דערצו מוזטו צושניידן דאס בלאַט לויט דער פיג׳ 14: דו מאכסט קליינע שפּאַלטן אין AB, און שניידסט אויס קליינע צינגלעך אויפן זאַם פון CD, אזוי אז זיי זאלן זיך האַלטן אויף דער גראָדער CD און זיי זאלן זיין פונקט אזוי ברייט ווי די שפאלטן אין AB. איצט קנייטש איין די צינגלעך פאַזע די פונקטירטע ליניעס, שטעק אַדורך די צינגלעך דורך די שפאלטן אינווייניג אריין, און גלעט אויס אינווייניג די געקנייטשטע טיילן. איצט האסטו גענוי אזא צילינדער, ווי די פיגור 15 ווייזט, אין וועלכן דו זעהסט פון אינווייניג די אריינגע־שטעקטע צינגלעך, וואס האלטן איצט פעסט דעם צילינדער.


פיג׳ 15.

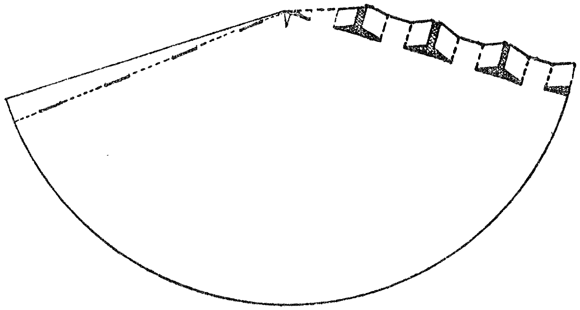
אויף דעם צילינדער קענסטו דורך יעדן פינטל פון זיין אויבערפלאַך פירן א גראָדע, אבער בלויז איינע: זי גייט אקוראט ארויפצו אדער אראפצו. מיר זעהען דא א גרויסן אונטערשייד לגבי דעם פליין, אויף וועלכן מיר קענען דורך יעדן פינטל פירן וויפיל מיר ווילן גראָדע.

קאנסטרוקציע פון א קאָנוס. א קאָנוס קען קאנסטרואירט ווערן אויפן גלייכן שטייגער, נאר עס איז אביסל שווערער אריינצושטעקן די קליינע צינגלעך ביי דעם שפּיציגען עק V, דעם אזוי גערופענעם שפּיץ פונם קאָנוס. א מאָדעל צום קנייטשן איז געגעבן אויף דער פיגור 16, און דער פאַרטיגער מאדעל אויף דער פיגור 17a.

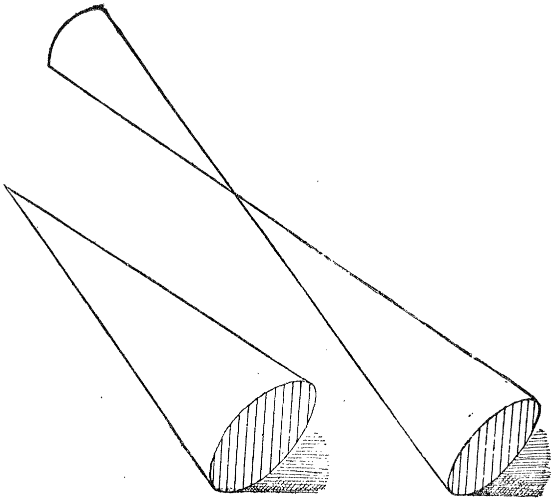
דורך יעדן פינטל פון דעם אויבערפלאַך פונם קאָנוס, חוץ A, קען דורכגעפירט ווערן אויף אים א גראָדע און בלויז איינע. זי גייט שטענדיג אַדורך דעם שפּיץ פונם קאָנוס. דורך דעם שפּיץ A גופא קען מען דעריבער פירן אויף דעם אויבערפלאַך פונם קאָנוס יעדע וועלכע מען וויל נאר צאל פון גראָדע. דערמיט שיידט ער זיך אונטער פון א צילינדער און פון א פליין.

דער בלומענטאָפּ איז א טייל פון א קאָנוס. דער שפּיץ איז אפגעשניטן

און דער קאָנוס שטייט אויף א פלייניגן גרונט. ווען דו וועסט אין די גע־
דאנקען פארלענגערן די גראָדע ליניעס פונם בלומענטאָפּ, וועלן זיי זיך



פיג. 16.



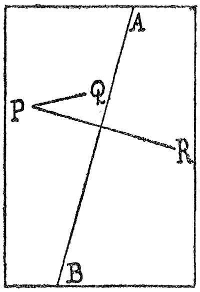
פיג. 17a.   פיג. 17b.

אלע שניידן אין דעם שפיץ פונם קאָנוס, וואס אים וועט אויסקומען צו
ליגן אונטער דעם דעק פון דעם טאָפּ. דו קענסט אין די געדאנקען פאר־
לענגערן די גראָדע פון יעדן שטיק פון א צילינדער אדער פון א קאָנוס.

דו באקומסט דעמאלט א גרעסער שטיק צײלינדער אדער קאָנוס· װען דו װעסט פארלענגערן די גראָדע פון א קאָנוס איבער זײן שפּיץ אריבער, װעסטו זעהען, אז דער קאָנוס באשטײט פון צװײ אזעלכער שטיקער, װי מיר האבן קאנסטרואירט, זײ זײנען פארבונדן בלויז אין דעם שפּיץ און פארברײטערן זיך אין בײדע זײטן מיט אפענע לעפצונגען, װאס װערן אלץ גרעסער און גרעסער, װאס מער מיר װײטערן זיך פון דעם שפּיץ (פיג· 17b)·

§ 5. די טײלונג פון א פלײן דורך א גראָדער·

נעם דײן בלאַט פּאפּיר און פיר אויף אים א גראָדע, און פארלענגער זי אויף בײדע זײטן אזוי װײט, װיפיל דײן פּאפּיר דערלאָזט· די פינטלעך, אין װעלכע די ליניע שנײדט די רענדער פונם פּאפּיר, רוף אָן A און B· װען דו װאלסט דורכגעשניטן דאס בלאַט פּאזע AB, װאלט עס צעפאלן אין צװײ באזונדערע שטיקער· דעריבער זאגן מיר, אז די גראָדע AB טײלט דעם פלײן אויף צװײ טײלן, און מיר זאגן װעגן די פינטלעך, װאס ליגן (װי למשל P און Q אויף פיג· 18) אויף אײנעם פון די בײדע טײלן, אבער ניט אויף דער ליניע AB, אז זײ ליגן אויף דערזעלביגער זײט פון AB· פון דעם פינטל R אין דעם אנדערן טײל פון דעם פלײן זאגן מיר: ער ליגט אויף דער אנדערער אדער אנטקעגנדיגער זײט פון AB לגבי די פינטלעך Q און P· װען מיר װעלן פארבינדן P מיט Q, װעט דער גראָד־ליניגער אָפּשניט PQ ניט שנײדן די ליניע AB, אבער װען מיר װעלן פירן די ליניע PR, װעט דער אָפּשניט PR זיכער דורכ־שנײדן די גראָדע AB· די גראָדע[1]) PQ װעט אַפּנים אויך שנײדן די גראָדע AB, אבער דער שניטפינטל ליגט ניט צװישן P און Q·



פיג· 18·

װען מיר װעלן די גראָדע AB פארלענגערן אין בײדע זײטן און אויס־שפרײטן דעם פלײן אין די געדאנקן אזוי װײט, װי מיר װילן, װעט אלץ דער כלל בלײבן א כלל, אז דער פלײן װערט דורך דער גראָדער צעטײלט אויף צװײ טײלן· (דעריבער האבן מיר רעכט צו זאגן, אז די גראָדע האט צװײ זײטן, אײן זײט פון אײן טײל פון פלײן, די אנדערע זײט פון דעם אנדערן

[1]) דא מוז דער לערער נאָכאַמאָל אויפקלערן די נפקאמינא צװישן גראָדע און אָפּשניט·

טייל פון פליין.) צוויי פינטלעך אויף דערזועלביגער זייט פון דער גראָדער קענען פארבונדן ווערן מיט א גראָדליניגן אפשניט, וואס שניידט ניט די גראָדע; דער פארבינדנדיגער אפשניט צווישן צוויי פינטלעך אויף אנטקעגנ־דיגע זייטן פון א גראָדער שניידט יאָ די גראָדע. זאלסט אבער ניט מיינען, אז דאס אייגענע איז ריכטיג בנוגע אלע אויבערפלאַכן, אויף וועלכע מען קען פירן גראָדע. טו א קלער וועגן א צילינדער אדער וועגן א קאָנוס. א גראָדע AB אויף א צילינטער אדער אויף א קאָנוס טיילט ניט זייער אויבערפלאַך אויף צוויי טיילן. אויב מיר ווילן צעשניידן א צילינדער אויף צוויי טיילן, מוזן מיר אַפריהער שניידן פאזע איין גראָדער, אַנאָך פאזע א צווייטער גראָדער. דער ערשטער שניט אליין וועט נאך דעם אויבערפלאַך פון דעם צילינדער ניט צעטיילן אויף צוויי טיילן. ווען מיר וועלן אויף דעם צילינדער נעמען צוויי פינטלעך P און Q, קענען מיר די ביידע פינטלעך ניט פארבינדן מיט א גדאָדער, וואס ליגט אויף דעם צילינדער, סיידן ווען זיי ליגן צופעליג אויף איין גראָדער פון דעם אויבערפלאַך; אבער מיר קענען פארבינדן P און Q מיט א קרומער ליניע, וועלכע מיר קענען שטענדיג פירן אזוי, אז זי זאל ניט דורכשניידן AB. דאס קענסטו זעהען אויף אזא אופן: ווען דו וועסט דורכשניידן דעם צילינדער פאזע AB, קענסטו אויסגלעטן דעם צילינדער גאנץ פלאַך. ווען דו וועסט איצט פירן דעם גראָדליניגן אָפשניט PQ און פונסניי צונויפדרייען דעם צילינדער, אזוי אז די געשניטענע רענדער זאלן פאסן איינער צום אנדערן, וועט פון דעם גראָדליניגן אָפשניט PQ ווערן א קרומע ליניע, וואס פארבינדט די פינטלעך P און Q, אבער שניידט ניט AB.

פונקט אזוי איז עס בנוגע א קאָנוס.

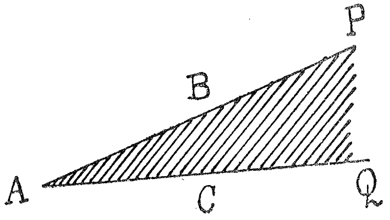
ווינקלען.

§ 6. **דעפיניציע.** ווען דו וועסט פירן צוויי וואס פאר ניט איז שטראלן AB און AC פון איין פינטל A, וועלן זיי בילדן, ווי מען זאגט, א ווינקל (פיג. 19a). דעם פונקט A רופט מען דעם שפיץ פונם ווינקל, AB און AC זיינען די זייטן פון דעם ווינקל. מיר רופן אים אָן ווינקל BAC, שטעלנדיג אינמיטן דעם אות A, מיט וועלכן מיר באצייכענען דעם שפיץ, און פון ביידע זייטן פון A די אותיות B און C,

מיט וועלכע מיר באצייכענען צוויי פינטלעך אויףביידע זייטן פונם ווינקל. ווען P איז א צווייטער פינטל אויף דעם שטראל AB און Q א צווייטער פינטל אויף דעם שטראל AC, איז PAQ א צווייטע באצייכענונג פאר דעמזעלביגן ווינקל BAC.

מען זאגט: די גראַדע AB בילדעט מיט דער גראַדער AC דעם ווינקל BAC.

א ווינקל האט, פונקט ווי דער אויבערפלאַך פון א פעסטן קערפער, א דרויסנדיגן רוים און א אינווייניגסטן רוים. ווען מיר וועלן צעשניידן דעם פליין פאזע די זייטן פונם ווינקל, וועט דער פליין צעפאלן אויף צוויי טיילן, אזוי ווי ווען מיר צעשניידן אים פאזע א גראַדער. אבער די ביידע טיילן זעהען ניט אויס איינער ווי דער אנדערער, ווי דאס איז געוועזן ביי דער גראַדער. איצט ווייזט איין טייל אויס קלענער פונם אנדערן. אטדעם קלענערן



פיג. 19a.

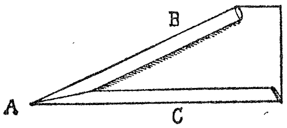
טייל, ניט אריינרעכענענדיג די זייטן, וואס באגרעניצן אים, רופן מיר אינווייניגסטער רוים פונם ווינקל (אויף דער פיגור 19a איז ער געשטריכלט); דעם אנדערן טייל, אויכעט אהן די זייטן פונם ווינקל, רופן מיר דרויסנדיגער רוים. צוויי פינטלעך אינווייניג אין דעם ווינקל

פיג. 19b.

קענען שטענדיג פארבונדן ווערן מיט א אפשניט, וואס שניידט ניט די זייטן פונם ווינקל. צוויי פינטלעך דרויסן פונם ווינקל קענען אָפט אויך פארבונדן ווערן מיט אזא אפשניט, און שטענדיג קען מען זיי פארבינדן מיט א געצאקטער ליניע, ניט שניידנדיג די זייטן פונם ווינקל (פיג. 19b).

ווען מיר ריידן וועגן א ווינקל, מיינען מיר געוואוינליך דעם אינווייניגסטן רוים זיינעם, פונקט ווי ביי דעם אויבערפלאַך פון א פעסטן קערפער

שטעלן מיר זיך פאר זיין תוכן (למשל ביי א פילקע). ווען דו וועסט איינ־קנייטשן דיין פאפיר פאזע AB און AC און באזייטיגן דאס איבעריגע פאפיר (ווי אויף פיג. 20), וועסטו באקומען א זעהר גוטן מאדעל פון א ווינקל, ביי וועלכן מיר רעכענען זיך בלויז מיט דעם אינווייניגסטן רוים, ווי מיר האבן אקארשט געלערנט[1]. דו קענסט געוואוינט־ליך אויסקנייטשן פארשיידענע מאדעלן פון דעמזעלביגן ווינקל, נעמענדיג לענגערע



פיג. 20.

אדער קירצערע זייטן פארן מאדעל; פאר דעם ווינקל גופא איז די לענג פון זיינע זייטן ניט וויכטיג, אבער פאר דער אויספירונג פונם מאדעל איז בעסער צו נעמען ניט צו קורצע זייטן, כדי מען זאל קענען דערקענען די גענייגטקייט פון די שטראַלן צואנאנדער.

יעדער גראָדליניגער אָפשניט, אויף וועלכן דו קוקסט, שאַפט פאַר דיין אויג (מען זאגט אויך: באַשטימט פאר דיין אויג) א ווינקל, וועלכן מען רופט זעהווינקל, וואס אונטער אים באווייזט זיך דער אפשניט אין דיין אויג. מען געפינט אים אויף אזא אופן: די שטראלן, וואס גייען פון דיין אויג (ריכטיגער פון איין פינטל פון דיין אויג) צו AB, ליגן אויף איין פליין און פילן אויס דעם אינווייניגסטן רוים פון א ווינקל, וואס ווערט געבילדעט דורך די שטראלן, וואס גייען פון דיין אויג (ריכטיגער פון א פינטל פון דיין אויג) צו A און B. אטדער ווינקל איז דער זעהווינקל, אונטער וועלכן דער אפשניט AB באווייזט זיך אין דיין אויג.

די באגריפן «גלייך», «גרעסער», «קלענער».

§ 7. גלייכקייט פון גראָדע ליניעס, גלייכקייט פון אָפשניטן.

פיר אויף דיין פאפיר דעם אפשניט PQ און, צולייגענדיג הארט צו אים דיין פאפירענע ווירע, מאַך אויף איר צווי קורצע פאַסקעס ביי P און Q. נעם אוועק די ווירע, און באצייכן די שניטפינטלעך פון די פאַסקעס אויף דעם קאנט פון דער ווירע מיט A און B. ווען די ווירע ווערט צוגעלייגט

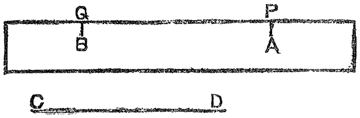
[1] א מאדעל פון א ווינקל קען מען נאך מאכן, אויסשניידנדיג אים פון פאפיר אדער פון טאקטור. עס איז זעהר לייכט צו מאכן אזא ווינקל גאנץ אקוראט.

צו PQ אזוי, אז A זאל ליגן אויף P, און B אויף Q, זאגן מיר: דער אָפּ־שניט AB באַדעקט דעם אפשניט PQ, דאס הייסט AB איז ארויפגעלייגט אויף PQ. וועגן וואס פאר ניט איז צוויי אפשניטן AB און PQ, וואס קענען באַדעקן איינער דעם אנדערן זאגט מען: זיי האבן א גלייכע לענג. מיר שרייבען דאס בקיצור:

$$AB = PQ.$$

לאמיר דאס אנרופן «דער פרינציפ פון באַדעקונג».

דו מוזט באקלערן, אז מיר זאגן: PQ און AB באַדעקן איינער דעם אנדערן, ווארום די אפשניטן זיינען געפירט אויף צוויי פארשיידענע בלעטער פאפיר, אזוי, אז זיי קענען קיין מאל ניט צונויפפאלן, ווי פעסט מיר זאלן ניט צופרעסן די בלעטער צואנאנדער. אַלעמאָל וועט צווישן זיי בלייבן א געוויסער רוים. אבער אין די געדאנקען קענען מיר זיך אויסמאלן צוויי גראָדע ליניעס, ניט באנוצנדיג זייער געמעל אויפן פאפיר, און מיר קענען אין די געדאנקען אוועקלייגן דעם פינטל A ניט אויף דעם פינטל P, נייערט אין דעם פינטל P, און דעם פינטל B ניט אויף, נייערט אין דעם פינטל Q, דעמאלט וועלןביידע גראָדע ניט באַדעקן איינע די אנדערע, נייערט זיי וועלן צונויפפאלן.



פיג. 21a.

איצט לייג ארויף די ווירע אויף אן אנדער ארט אויף דיין בלאט און פיר דעם בליישטיפט פאזע איר קאַנט פון A ביז B, וועסטו באקומען א דריטן אָפּשניט, וואס זיינע עקן וועלן מיר אנרופן C און D. דעמאלט איז

$$AB = CD$$

ווייל AB האט דאָך באַדעקט CD.

ווען דו וועסט איצט אָפּשניידן דעם טייל פון דיין פאפיר, אויף וועלכן עס ליגט CD, פון דעם טייל, אויף וועלכן עס ליגט PQ, און וועסט מאכן א קנייטש פאזע CD, וועסטו געפינען, אז מען קען באַדעקן PQ מיט CD, דאס הייסט

$$CD = PQ.$$

באַדעקנדיג די אָפּשניטן, האסטו בפועל־ממש קאָנסטאַטירט, אז צוויי אָפּשניטן, וואס זיינען גלייך א דריטן, זיינען גלייך איינער דעם אנדערן. דא האבן מיר א נייע אקסיאמע:

צוויי גרייסן זיינען גלייך איינע דער אנדערער, ווען יעדע פון זיי איז גלייך א דריטער גרייס.

די אקסיאמע איז זעהר וויכטיג, און אהן איר קען מען זיך ניט באגיין, ווארום ניט אלעמאל קענען מיר די אָפשניטן, וואס מיר ווילן פארגלייכן, אריבערפירן פון איין אָרט אויף א אנדערן, כדי צו באדעקן איינעם מיט דעם אנדערן.

וויכטיג און נויטיג זיינען אויך די אקסיאמעס, וואס מיר וועלען באַלד לערנען. זייער ריכטיגקייט קען מען אלעמאל איינזעהען, ווען די אָפשניטן, וועגן וועלכע עס רעדט זיך, קענען אריבערגעפירט ווערן פון איין אָרט אויף א אנדערן, אדער ווען מען קען זיי אלע מעסטן מיט דערזעלביגער ווירע.

ווען צו צוויי גלייכע (גרייסן) ווערן צוגעלייגט גלייכע, באקומט מען גלייכע.

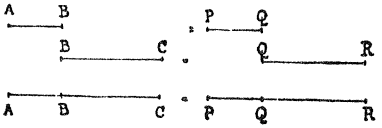
למשל: ווען

$AB = PQ$

און $BC = QR$,

דעמאלט איז

$AC = PR$



פיג. 21 b.

ווען פון צוויי גלייכע ווערן אראפגענומען גלייכע, באקומט מען גלייכע.

למשל, ווען ABC און PQR זיינען גראָדע, און

$$BC = QR$$

און B ליגט צווישן A און C, און Q צווישן P און R אזוי, אז

$$AC = PR,$$

דעמאלט איז $AB = PQ$.

אטדי אקסיאמעס זיינען נוגע ניט בלויז גלייכע אָפשניטן, נייערט בכלל גלייכע זאַכן, אלץ איינס וויאזוי זייער גלייכקייט ווערט באשטימט.

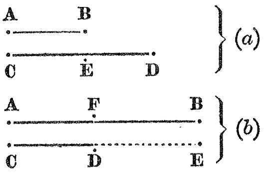
אין דער פראקטיק ווייזט זיך ארויס, אז דער שטייגער, וויאזוי מיר האבן דעם אָפשניט CD געמאכט גלייך דעם אָפשניט PQ, איז איינער פון די בעסטע. אָט זעהסטו, אז מיט דיין פאפירענער ווירע קענסטו דורך יעטוועדן פינטל C און אין יעטוועדער ריכטונג פירן גראָדע, וואס זיינען גלייך א געגעבענער גראָדער.

ווען אנשטאט א ריכטונג׳ דאס הייסט אנשטאט א שטראל דורך C׳ איז דיר געגעבן א גאנצע גראַדע דורך C מיט דער פּאָדערונג׳ אדער אנדערש גערעדט מיט דעם *אויפגאַבּ*׳ אז דו זאלסט פון C אָן אפשניידן פון איר א טייל׳ וואס זאל זיין גלייך AB׳ וועסטו באמערקן׳ אז עס זיינען פארהאן צוויי אזעלכער טיילן׳ צו איינעם אין יעדער ריכטונג פון C.

פון דער ליניע AB אויף דער פיגור 22 זאגט מען: זי איז 1 סאנטימעטער (1 cm) לאנג. געוואוינליך׳ ווען מען וויל זאגן׳ ווי לאנג א אָפּשניט איז׳ זאגט מען׳ וויפיל סאנטימעטער ער האַלט. אויב דער אָפּשניט איז זעהר לאנג׳ ווייזט מען אן זיין לענג אין מעטערס. א מעטער (1 m) האט הונדערט סאנטימעטער (100 cm) און איז אַן ערך אזוי לאנג׳ ווי דער אָפּשטאַנד פון די שפּיצפינגער פון דיין האנט ביז צו דער פּאַכווע פון דער צווייטער האנט (ביי א דערוואקסענעם).

ווען מיר פארלענגערן דעם אָפּשניט CD ביז E׳ פירנדיג DE אזוי׳ אז DE זאל זיין גלייך PQ׳ דעמאלט איז דער אָפּשניט CE צוויי מאל אזוי לאנג ווי דער אָפּשניט PQ. אויף אזא אופן גיט אונז די פּאפּירענע ווירע די מיגליכקייט צו פאַרטאָפּלען א געגעבענעם אָפּשניט אדער צו קאנסטרואירן א גראַדע׳ וואס איז צוויי מאל׳ דריי מאל׳ פיר מאל׳ און בכלל אין א גאנצער צאל מאָל גרעסער׳ ווי די געגעבענע גראַדע.

די באגריפן «גרעסער» און «קלענער». פיר איצט צוויי וואס פּאַר ניט איז אָפּשניטן AB און CE. לייג אָפּ אויף דעם שטראל CD׳ אנהייבנדיג פון C׳ דעם אָפּשניט AB = CE. עס קען זיך טרעפן׳ אז E און D וועלן צונויפפאלן׳ אדער אז E וועט ליגן צווישן C און D׳ אדער אז D וועט ליגן צווישן C און E.


פיג׳ 22.

פאַלן E און D צונויף׳ ווייסן מיר׳ אז AB = CD; ליגט E צווישן C און D׳ ווייסן מיר׳ אז AB איז גלייך דעם טייל CE פון דעם אָפּשניט CD (פיג׳ 22a); מיר זאגן דעמאלט: AB איז *קלענער* ווי CD; ווען D ליגט צווישן C און E׳ דעמאלט איז AB ניט גלייך דעם גאנצן אָפּשניט CD און ניט א טייל פון אים׳ און מיר זאגן דעמאלט: AB איז *גרעסער* ווי CD. אין דעם לעצטן פאל לאזט זיך CE באדעקן מיט AB׳ D ליגט דעמאלט אונטער א

פונקט F פון AB׳ דאס הייסט CD איז גלייך א טייל פון AB׳ דאס הייסט אבער׳ אז CD איז קלענער פון AB·

בכן׳ איז אדער AB גלייך CD; אדער AB איז קלענער ווי CD׳ אדער AB איז גרעסער ווי CD; ווען AB איז גרעסער ווי CD׳ דעמאלט איז CD קלענער ווי AB[1]·

דאס אלץ דאכט זיך דיר אויס זעהר לייכט׳ עס איז אבער זעהר וויכטיג; ווארום דו ביסט געוואוינט צו באנוצן די ווערטער גרעסער און קלענער׳ ניט קלערנדיג וועגן זייער גענויעם טייטש· ביי דעם לימוד פון געאמעטריע וועסטו אינגיכן זעהען׳ אז דיינע פארשטעלונגען וועגן גרעסער און קלענער זיינען ניט שטענדיג געווען ריכטיג· דעריין באשטייט טאַקע דער גרויסער נוץ פון געאמעטריע׳ וואס זי לערנט דיך צו קלערן וועגן דער טייטש פון געוויסע איינפאכע ווערטער·

מיר האבן דא געוועזט באנוצט דעם פרינציפ פון באדעקונג׳ כדי צו געפינען׳ וועלכער פון צוויי אומגלייכע אָפשניטן איז דער גרעסערער· געוואוינליך זאגן מיר׳ אז א טייל פון א גאנצן איז קלענער ווי דאס גאנצע· איך זאג: «געוואוינליך»׳ ווארום אומענדליכע גרייסן שרייבן מיר אטדי איינגעשאפט ניט צו; דו ווייסט שוין׳ וואס מען פארשטייט אונטער «אומענדליך»: א גראָדע איז אומענדליך׳ א פליין איז אומענדליך׳ און פונקט אזוי א צילינדער און א קאָנוס; אלץ׳ וואס מיר קענען ניט קאנסטרואירן אינגאנצן׳ אלס גאנצע פיגור׳ איז אומענדליך· וואס פאר גרויסע טיילן פון א אומענדליכער גרייס מיר זאלן ניט קאנסטרואירן׳ קען מען אלעמאל קאנסטרואירן נאך גרעסערע טיילן· מיר זאגן ניט: «א האלבע גראָדע איז אין צוויי מאל וויניגער לאנג ווי א גאנצע גראָדע»· באנוצנדיג דעם אויסדרוק «האלבע גראָדע» אדער «שטראל»׳ מיין איך בלויז׳ אז צוויי אזעלכע שטראלן צוזאמען בילדן א גראָדע· מיר ווילן דא בכלל ניט ריידן וועגן דער לענג פון גאנצע גראָדע ליניעס׳ אדער וועגן דער גרייס פון א אומענדליכער פיגור; דאס געהערט צו א גאנץ אנדערן׳ אויך זעהר א אינטערעסאנטן צווייג פון דער מאטעמאטיק· מיר ווילן זיך דא פאר־

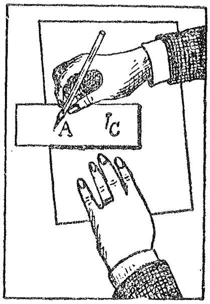
[1]) די אווטארן גייען ארויס פון די באגריפן «גלייך» און «קלענער» און דעפינירן דעם באגריף «גרעסער»׳ אלס דאס׳ וואס איז ניט «גלייך» און ניט «קלענער»· אין דער נייער געאמעטריע גייט מען ארויס פון די (אגב צונויפגעשפאנטע) באגריפן «גרעסער» און «קלענער» און דעפינירט «גלייך» אלס דאס׳ וואס איז ניט גרעסער און ניט קלענער; אדער מען גייט ארויס פון דעם איין באגריף «גרעסער» און דעפינירט «גלייך» אזוי: «צוויי גרייסן הייסן גלייך׳ ווען קיינע פון זיי איז ניט גרעסער פון דער אנדערער»· אזא גאַנג איז וויסענשאפטליך שטרענגער׳ אבער דידאקטיש שווערער· דער איבערזעצער·

נעמען בלויז מיט דער לענג פון ענדליכע גראָדע, מיט אָפּשניטן, און, ווען איך רייד וועגן דער לענג פון דער גראָדער AB, מיין איך דאס אלע־מאָל די לענג פון דעם גראָדליניגן אָפּשניט AB; מיר פארנעמען זיך דא נאָר מיט ענדליכע זאכן, מיט אזעלכע, וואס דו קענסט זיי קאנסטרואירן אינגאנצן, ניט טיילוויז; אלס גאנצע, ניט נאָר אלס טיילן. פון אלע אזעלכע ענדליכע גרייסן זאגן מיר — און דאס איז א נייע אקסיאמע —: דאס גאנצע איז גרעסער ווי יעדער פון זיינע טיילן.

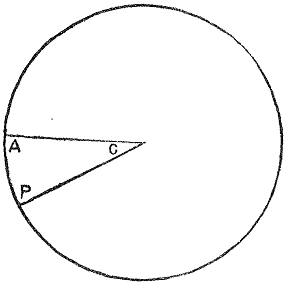
דער רינג.

§ 8. קאנסטרוקציע פון א רינג.

נעם דיין פאפירענע ווירע און שטעך אויס אין איר צוויי לעכלעך. איין לאָך זאל זיין קנאַפּ־וואס גרעסער פון דער אנדערער. גיב א קוק, צי איז דיין בליישטיפט גענוג שארף געשניצט, שטעק דורך א שפילקע דורך דעם שמעלערן לאָך און באפעסטיג דערמיט די ווירע אויף דיין בלאַט פאפיר.



פיג. 23.



פיג. 24.

דורך דעם צווייטן לאָך מאַך מיטן בליישטיפט א פינטל אויף דיין בלאַט פאפיר (פיג. 23). איצט האסטו צוויי פינטלעך אויף דיין בלאַט: דעם פינטל C, וואס דיין שפילקע האט אויסגעשטאכן, און דעם פינטל A, וואס דער שפיץ פון דעם בליישטיפט האט איבערגעלאָזן (פיג. 24). די גראָדע, וואס פארבינדט זיי, איז גלייך דער גראָדער צווישן די צוויי לעכלעך אויף

דיין פאפירענערווירע. ווען דו וועסט א ביסל א דריי טאָן די ווירע, האלטנדיג די שפילקע פעסט, און וועסט מאכן א צווייטן קייקעלע מיטן בליישטיפט, וועסטו באקומען א נייעם פינטל P, און די גראָדע, וואס פארבינדט אים מיט C, וועט זיין גלייך דער גראָדער, וואס פארבינדט A מיט C. מיר קענען קאנסטרואירן וויפיל מיר ווילן אזעלכע פינטלעך אויף אזא אופן, אבער עס וועלן שטענדיג זיין נאָך אנדערע פינטלעך מיט דער־זעלביגער אייגנשאפט. צי האבן מיר אַ מיטל צו געפינען אלע אזוינע פינטלעך, דאס הייסט אלע פינטלעך, וואס זייער אָפשטאַנד (מרחק) פון דעם שטאָך איז גלייך דעם אָפשטאַנד (מרחק) פונם פינטל A פון דעם שטאָך? ווען מיר קענען דאס געפינען, רופן מיר די צוזאַמענקייט פון די אלע פינטלעך זייער «געאמעטרישער אָרט». דו באקומסט די אלע פינטלעך, האלטנדיג פעסט די שפילקע און ארומדרייענדיג די ווירע מיט דעם אריינגע־שטעקטן בליישטיפט אזוי לאנג, ביז זי וועט זיך אומקערן צוריק צו איר ערשטער לאגע. דער שפיץ פון דעם אריינגעשטעקטן בליישטיפט בא־שרייבט א געוויסע קרומע ליניע. קוק זיך איצט איין, וואס דו האסט אויפ־געצייכנט! דו האסט אויפגעצייכנט א רינג (פיג. 24). יעטוועדער פינטל P פונם רינג האט דעמזעלביגן אָפשטאַנד פון דעם שטאָך C, ווי דער ערשטער פינטל A, און דו זעהסט, אז חוץ די פינטלעך פון דעם רינג קענען אנדערע פינטלעך ניט האבן דעמזעלביגן אָפשטאַנד פון C.

דער רינג איז דער געאמעטרישער אָרט פון א פינטל, וואס באוועגט זיך, באהאלטנדיג די גאנצע צייט דעמזעלביגן אָפשטאַנד פון דעם שטאָך. דעם שטאָך רופט מען צענטער פון דעם רינג. דאס איז די דערקלערונג פון א רינג און פון זיין צענטער. מען קען צייכענען דעמזעלביגן רינג אויף א אנדער שטייגער, פעסט ארײנשטעלנדיג דעם בליישטיפט אינס לעכל פון דער ווירע און דרייענדיג דאס בלאַט אונטער אים. ווען דו וועסט אזוי טאָן, וועט דער שפיץ פון דיין בליישטיפט כסדר באדעקן יעדן פינטל פון דעם רינג. דער רינג דרייט זיך דערביי, ווי א ראָד פון א וואָגן, אזוי אז יעדער פינטל פונם רינג גייט כסדר און נאכאנאנד אריבער אויף אַן אָרט, וואו פריהער איז געלעגן אן אנדער פינטל פונם רינג. מיר זאגען: דער רינג דרייט זיך אין זיך גופא, בעת זיין צענטער בלייבט רוהיג.

דעפיניציע. יעדע גראָדע, וואס פארבינדט דעם צענטער מיט א פינטל פונם רינג, הייסט ראדיוס פונם רינג.

אלע ראדיוסן פונם רינג זיינען גלייך איינער דעם אנדערן.

איינניטונג.

צייכן א רינג מיט דעם צענטער C און מיט א ראדיוס, וואס איז גלייך דער געגעבענער גראָדער (אָפּשניט) PQ.

דעפיניציע. א גראָדע, וואס גייט אַדורך דורך דעם צענטער פון א רינג און ליגט מיט אירע עקן אויף דעם רינג, הייסט דיאמעטער פון דעם רינג. («דיאַ» הייסט אויף גריכיש, דורך, «מעטר» — מאָס; דיאמעטער די גראָדע, וואס מעסט אויס דעם רינג פון איין עק צום אנדערן). ווי לאנג איז דער דיאמעטער פון א רינג? צוויי מאל אזוי לאנג, ווי דער ראדיוס. דערפון איז געדרונגען: אלע דיאמעטערס פון א רינג זיינען גלייך איינער דעם אנדערן. ווען דו ווערסט איינקנייטשן דאס בלאַט פאזע דעם דיאמעטער פון דעם רינג, וועלן ביידע העלפטן פונם רינג באדעקן איינער דעם אנדערן. פארוואס געשעהט דאס? ווייל דער צענטער ליגט אויפן קנייטש, און לגבי יעדן פינטל אויף איין זייט פונם קנייטש מוז ליגן א פאסיגער פינטל אויף דער אנדערער זייט, וואס האט דעמזעלביגן אָפּשטאַנד פון דעם צענטער פונם רינג. דעריבער מוז אויך לגבי יעדן פינטל פונם רינג אויף איין זייט פונם קנייטש ליגן א פאסיגער פינטל פונם רינג אויף דער אנדערער זייט.

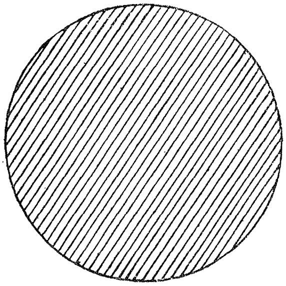
אזוי זעהען מיר, אז דער רינג איז צעטיילט אויף צוויי טיילן, וואס מען מוז זיי אנרופן גלייך, מחמת מען קען באדעקן איינעם מיטן אנדערן. יעדער טייל איז די העלפט פונם רינג, און מיר רופען יעדע העלפט א האלבן רינג.

איינניטונג.

ווייז, אז א רינג מיט דעם צענטער C מוז יעדן שטראל, וואס גייט דורך C, שניידן אין איין פינטל.

דער ראָד. א רינג צעטיילט, פונקט ווי א גראָדע און ווי א ווינקל, דעם פליין אויף צוויי טיילן. אבער עס איז א חלוק צווישן דער טיילונג פונם פליין דורך א רינג און דער טיילונג זיינער דורך א גראָדער אדער דורך א ווינקל. איינער פון די טיילן, אויף וועלכע דער רינג צעטיילט דעם פליין, קען זיך ניט ענדערן, ווי גרויס דאס שטיק פליין, אויף וועלכן דער רינג ליגט, זאל ניט זיין, און בלויז דעם צווייטן טייל פונם פליין (דרויסן ארום דעם רינג) קען מען פארגרעסערן אדער פארקלענערן. דער טייל,

וואס קען זיך ניט ענדערן, איז אויף דער פיגור 25 געשטריכעלט. דער טייל איז איינגעשלאסן אין דעם רינג (אדער דורך דעם רינג); מען זאָגט: דער רינג איז זיין באגרעניצונג. דעם איינגעשלאסענעם טייל פון דעם פליין רופט מען ראָד. יעדער פינטל פונם ראָד, וואס ליגט ניט אויף דעם רינג, ליגט אינווייניג אין דעם ראָד. יעדער פינטל פונם אנדערן טייל פונם פליין, וואס ליגט ניט אויף דעם רינג, ליגט דרויסן פונם ראָד.



פיג. 25.

יעדער פינטל אינווייניג אינם ראָד ליגט אויף א ראדיוס, און זיין אָפּשטאַנד פונם צענטער איז בכלל קלענער ווי דער ראדיוס; פארקערט, יעדער פינטל דרויסן פונם ראָד האט א אָפּשטאַנד פונם צענטער, א גרעסערן ווי דער ראדיוס.

ווען מען דארף ניט מורא האבן פאר א טעות, פארבייט מען אָפט דאס ווארט ריגג מיטן ווארט ראָד, דאס הייסט מען זאגט ראָד און מען מיינט דעם רינג פונם ראָד.

דאס שטיק פליין, וועלכן דער ראָד פארנעמט, רופט מען «שטח פון דעם ראָד».

סימעטריע. מיר זאגן: דער ראָד ליגט סימעטריש בנוגע זיין דיאמעטער. דער טייטש פון די ווערטער איז, אז דער דיאמעטער איז א שטייגער ווי א שפיגעל, און יעדער האלבער ראָד איז די אפשפיגלונג פונם אנדערן האלבען ראָד אין אטדעם שפיגל. קנייטש איין דיין בלאַט פאפיר פאזע דעם דיאמעטער; ווען דו וועסט איצט דאס בלאַט פאפיר מיט דעם קנייטש צולייגן צו א שטייעדיגן שפיגל, האלטנדיג דאס בלאַט האָרי־זאנטאל, וועסטו אין שפיגל דערזעהן דעם צווייטן האלבן ראָד, און ביידע האלבע רינגען, דער אמתער און דער אפגעשפיגלטער, וועלן צוזאַמען אויסמאכן א גאנצן רינג, אדער א גאנצן ראָד.

אלע קערפער, וואס זייערע העלפטן באציהען זיך צואנאנדער ווי צווי אפשפיגלונגען, הייסן סימעטרישע קערפער. קוק זיך ארום אין חדר און רוף מיר אן עטליכע זאכן, וואס זיינען סימעטריש. א מענש איז סימעטריש געבויט; די רעכטע העלפט און די לינקע העלפט פונם קערפער באציהען

זיך, ווי צוויי אפשפיגלונגען, דאס הייסט: גלייך ווי יעדע העלפט וואלט געווען א אפשפיגלונג פון דער אנדערער. א זייגער, א קעסל, א פלאש, א בוך, כמעט אלע זאכן אין דעם חדר זיינען סימעטריש, ווי בכלל אלץ, וואס דער מענש ארבעט אויס. אבער אויך די חיות און די געוועקסן זיינען געבויט סימעטריש אדער כמעט סימעטריש, למשל א סאָסנע, א רויז, א טולפּאַן, א הונט אדער א פערד. א שטיין אויפן טראַקט איז זעלטן סימעטריש; טאמער איז ער סימעטריש, זיינען מיר משער, אז מען האט אים בכיוון אזוי געשניטן; ער איז א קינסטליכער שטיין.

אזעלכע פעסטע קערפער רופט מען סימעטריש בנוגע א פליין, וואס מען מוז זיך אין די געדאנקען אויסמאָלן, אלס א אפשפיגלענדיגן פליין. א ראָד קענען מיר אנרופן סימעטריש בנוגע ליאד וועלכן פליין, וואס גייט אַדורך דורך א דיאמעטער זיינעם. מיר זעהען דאס, ווען מיר לייגן דעם פליין פונם ראָד האריזאנטאל, און דעם פליין, בנוגע וועלכן דער ראָד איז סי־מעטריש, ווערטיקאל. אבער, היות ווי, באטראכטנדיג א פיגור אויף א פליין, למשל א ראָד, נעמען מיר ניט אין באטראַכט דעם רוים, וואס ליגט ניט אין אטדעם פליין, זאגן מיר: דער ראָד איז סימעטריש בנוגע יעדן פון זיינע דיאמעטערס. ווען א פלייניגע פיגור איז סימעטריש בנוגע א גראָדער, און מיר קנייטשן איין דאס בלאַט פאפיר פאזע אטדער גראָדער, דעמאלט פאַלט די פיגור צונויף מיט זיך גופא.

אסך פון די סימעטרישע קערפער, וואס מיר האבן אנגערופן, זיינען סימעטריש בנוגע איין איינציגן פליין. זאג מיר, בנוגע וועלכן פליין איז סימעטריש דער זייגער. דער ראָד איז סימעטריש בנוגע א פולע ליניעס אויף דעם פליין, און דו וועסט מיר אוודאי קענען אנרופן עטליכע פעסטע קערפער, וואס זיינען סימעטריש בנוגע מער, ווי איין פליין. א פילקע איז סימעטריש בנוגע יעדן פליין דורך איר צענטער. א בוך איז סימעטריש בנוגע צוויי פליינען; ווי ליגן זיי? א בעכער איז סימעטריש בנוגע א פולע פליינען, פונקט אזוי א פלאש אדער א בלומענטאָפּ. זאג מיר, ווי די פליינען ליגן.

דער קויל. שנייד אויס א ראָד פון טאַקטור, ציה אַדורך דורך זיין צענטער א לאנגן שווארצן פאָדים און מאך א קניפל פון ביידע עקן פונם פאָדים; האלט דעם קניפל צווישן די פינגער און פלעכט צונויף די פעדימער (ווי מען דרייט שטריק) אזוי פעסט, ווי דו קענסט נאר. איצט

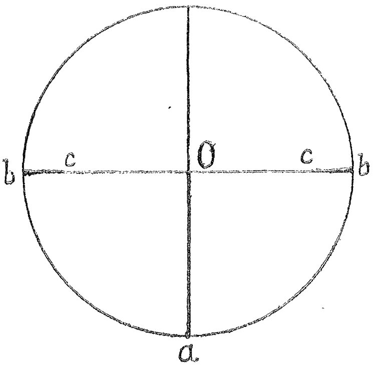
לאז אראָפּ דעם ראָד ווערטיקאַל, האלט אים א רגע צו, כדי ער זאל זיך ניט וויגען אהין און אהער, אַנאָך לאָז אים אָפּ; דעמאלט וועט זיך דער פּאָדים אפּוויקלען. וואס טוט דערביי דער פאפּירענער ראָד? ער דרייט זיך און דרייט זיך ארום דעם פּאָדים, ארום איינעם פון די דיאמעטערס זיינע, דהיינו ארום זיין ווערטיקאלן דיאמעטער (ווארום די גראָדע ליניע פונם פּאָדים, פּארלענגערט ביז צו דער אנדערער זייט פונם ראָד, איז דער דיאמעטער פונם ראָד).

בשעת דער ראָד האט זיך געדרייט ארום און ארום, האט זיך דיר מסתמא געדוכט, אז דו זעהסט מער ווי איין ראָד, און, וואס גיכער דער ראָד האט זיך געדרייט, אלץ מער רעדער האסטו געזעהען. די סיבה דער־פון איז, אז אין דיין אויג איז נאך געוועזן דאס געמעל פונם ראָד אין א געוויסער לאַגע, בשעת דער ראָד האט שוין אנגענומען אן אנדער לאַגע. אויב דער ראָד באוועגט זיך גיך, קענסטו האבן אין דיין אויג צוויי אדער דריי געמעלן פון אים פּאַראַמאָל, און, אז מיר וואלטן דרייען דעם פּאָדים זעהר־זעהר גיך, וואלטן אין דיין אויג געוועזן אזוי פיל געמעלן, אז דו וואלטסט זיי גאָר ניט געקענט ציילן.

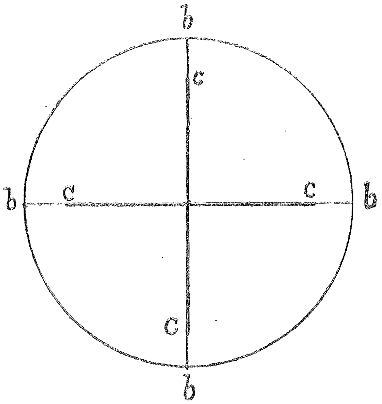
דיר וואלט זיך געדאכט, אז דו זעהסט א ווייסע פילקע, א קויל. דער אויבערפלאַך פון דער ווייסער פילקע – לאמיר זיך נאר פארשטעלן, אז זי איז במציאות פארהאן דארטן, ווא דו זעהסט זי – אנטהאלט אין יעדער רגע דעם רינג פון דעם געדרייטן ראָד. דו מוסט זיך פארשטעלן את־דעם קויל, בשעת דו זעהסט, ווי דער ראָד דרייט זיך, הגם ער דרייט זיך ניט אזוי גיך, אז דו זאלסט אין אמתן זעהען א פילקע.

איצט מאך זיך א מאָדעל, וואס זאל דיר געבן א פארשטעלונג פון דעם קויל, וואס דער ראָד האט באשריבן, דרייענדיג זיך. קנייטש איין א שטיק פאפיר, און לייג צונויף ביידע העלפטן, אבער גאנץ אקוראַט. נעם דיין פאפירענע ווירע, דיין בליישטיפט און דיין שפּילקע און צייכן צוויי רעדער מיט דעמזעלביגן ראדיוס. פיר אַדורך אין יעדערן פון זיי צו צוויי זיך שניידנדיגע דיאמעטערס, ווי אויף דער פיגור 26a. נעם א שער, שנייד דורך דאס פאפיר פאזע איין האלבן דיאמעטער און שנייד אביסל אַיין ביידע עקן פון דעם צווייטן דיאמעטער, ווי אויף דער פיגור 26b; שנייד ארויס דעם ראָד דורך ביידע בלעטער פאפיר און לייג אריין איינס אין דאס אנ־דערע, דורכשטעקנדיג יעדערן דורך דעם אויפגעשניטענעם ראדיוס פונם אנדערן, ווי אויף דער פיגור 27a.

איצט שנייד ארויס דעם צווייטן ראָד, אבער נאר דורך איין בלאַט פאפיר. שנייד דורך ביידע דיאמעטערס פון דעם צענטער ביז הארט צום ראנד, ווי אויף פיגור 26b, אויסמארקירנדיג, אז ביים ראנד זאל בלייבן א זאַם, וואס זאל זיין צוגעפאסט צו די זייטיגע אויסשניטן אין די ערשטע צוויי רעדער. איינשניידנדיג די דיאמעטערס, מוזטו אויסמארקירן, אז זיי זאלן זיין אזוי ברייט, ווי די דיק פון דעם פאפיר פאָדערט, כדי דו זאלסט דורך דעם שפאלט קענען ארייגשטעקן די פריהערדיגע צוויי רעדער. איצט שטעק זיי ארײַן, ווי אויף דער פיגור 27b, פארבייג אקוראַט די



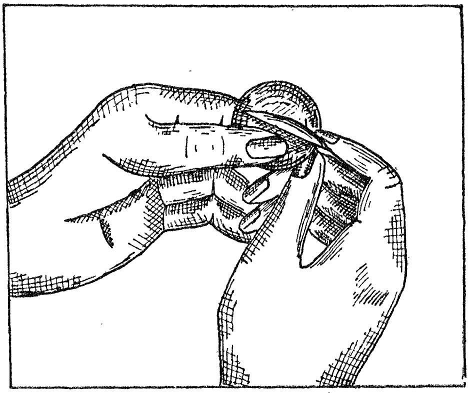
פיג. 26a.



פיג. 26b.

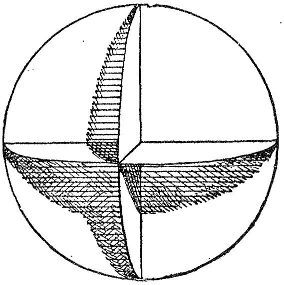
רענדער, אבער קנייטש זיי ניט מער, ווי מען דאַרף. איצט האסטו א מאָדעל, ווי עס איז אויפגעצייכנט אויף דער פיגור 27b. דו זעהסט אויף אים צוויי לאַגעס פון דעם געדרייטן ראָד; דער דריטער ראָד דינט נאר אויף צונויפצוהאלטן די ערשטע צוויי. אבער אויך זיין רינג ליגט אויף דעם אויבערפלאַך פון דעם קויל. ווען דו וועסט זיך גוט איינקוקן אויף דעם מאָדעל, בין איך בטוח, אז דו וועסט זיך קענען פארשטעלן דעם איבעריגן אויבערפלאַך פונם קויל, ניט דרייענדיג דעם מאָדעל. אבער דו קענסט דורכציהען א פאָדים דורך איינעם פון די איינגעשניטענע ראדיוסן פונם דריטען ראָד, אויפהענגען דעם מאָדעל און אים דרייען, דעמאלט וועסטו לייכט זעהען דעם באשריבענעם קויל.

די דריי שטיקלעך פאפיר, וואס דו האסט אריינגעשטעקט איינס אין דאס אנדערע, כדי צו מאכן דעם מאָדעל, זיינען שטיקער פון פליינען. ווי שניידן זיך יעטוועדע צוויי פון זיי? אין א גראָדער ליניע. און וואס באַטייט דער אָפשניט פון אט־דער גראָדער אין אונזער מאָדעל? דאס איז דער דיאַמעטער פון ביידע רעדער אין די צוויי פליינען.



פיג. 27a.

אלע דריי שטיקלעך פאפיר שניידן זיך. וואס האבן זיי בשותפות? זיי האבן איין פינטל בשותפות, ווי דער שטייגער איז ביי דריי פליינען, וואס שניידן זיך פאָרוויַיז. דער בשותפותדיגער פינטל איז דער צענטער פון יעדערן פון די דריי רעדער; ער הייסט צענטער פון דעם קויל. בשעת דער מאָדעל דרייט זיך, דרייט זיך איינער פון די דריי רעדער ארום זיין צענטער, בלייבנדיג שטענדיג אין דעמזעלביגן פליין. אטדעם ראָד וועלן מיר אנרופן עקוואַטאָר. דער דיאמעטער פון ביידע אנדערע רעדער, וואס ליגט אויף איין גראָדער ליניע מיטן פאָדים, הייסט די אַקס פון דער דרייאונג אדער בקיצור סתם די אַקס; ביידע עקן אירע הייסן פּאָלוסן. דער אויבערשטער עק פונם פאָדים זאל הייסן דער צפונדיגער פּאָלוס, דער אונטערשטער — דער דרומדיגער.



פיג. 27b.

דו ווייסט מסתמא, פאַרוואס מיר האבן זיי אזוי א נאמען געגעבן. מיר האבן די נעמען אנטליהען ביי אונזער ערד, וואס איז אויך א קויל, ניט רעכענענדיג אירע אומגלאַטקייטן. זי דרייט זיך ארום איר אַקס, וואס גייט אַדורך דורך דעם צפונדיגן פּאָלוס און דורך דעם דרומדיגן (אויף די פּאָלוסן איז שטענדיג קאלט און אייזיג,

דער עקוואַטאָר, פּארקערט, גייט אַדורך דורך קאַנטן, וואו עס איז שטענדיג הייס).

דער עקוואַטאָר צעטיילט דעם קויל אין צוויי סימעטרישע טיילן, וואס זיינען אפשפיגלונגען איינער פונם אנדערן; זיי הייסן האלבע קולן אדער העמיספערעס («העמי» הייסט אויף גריכיש האַלב, «ספערע» איז א קניידל, א קויל, א פּילקע). די צפונדיגע העמיספערע ליגט אויבן, די דרומדיגע אונטן. ווען אונזער קויל וואלט געווען דער כדור־הארץ, וואלטן ליטע, פוילן און רוסלאנד געלעגען אויף דעם אויבערשטן האלבן קויל, און אוו־סטראַליע דאָ אונטן אויף דעם דרומדיגן האלבן קויל. וואו וואלט געלעגן ארץ־ישראל?

די רעדער, וואס זייערע פליינען גייען אַדורך די אַקסן, הייסן מערידיאַנען. אטדיביידע רעדער פון דעם מאָדעל זיינען מערידיאַנען, און בשעת דער מאָדעל דרייט זיך, נעמען זיי כסדר אָן די לאגעס פון אלע מערידיאַנען.

ווען דאס וואלט געווען די ערד, וואלט אויף יענעם מערידיאַן, אן ערך אויף העלפט וועג צווישן דעם עקוואַטאָר און דעם צפונדיגן פּאָלוס געלעגן ליטע, און אויף דער אנטקעגנדיגער זייט פון דער ערד וואלט אויף דעמ־זעלביגן מערידיאַן געלעגן דער גרויסער (דער שטילער) אָקעאַן, ארום ניי־זעלאנד. אויף אן אנדער מערידיאַן אויף דעם צפונדיגן האלבן קויל וואלט געלעגן די אמעריקאנישע שטאָט ניויאָרק.

יענע דריי רעדער רופט מען די גרויסע רעדער פון דעם קויל. יעדער ראָד, וואס גייט דורך דעם צענטער פון דעם קויל ווערט אנגערופן גרויסער ראָד; אלע גרויסע רעדער פון איין קויל האבן דעמזעלביגן ראדיוס. ער איז גלייך דעם אָפּשטאַנד צווישן יעדן פּינטל אויף דעם קויל און צווישן דעם צענטער, דאס הייסט, ער איז גלייך דעם ראדיוס פונם קויל; מיר באצייכענען מיט דעם וואָרט ראדיוס יעדע גראָדע, וואס ווערט געפירט פונם צענטער צו וואס פאר ניט איז פּינטל אויף דעם קויל. א קויל איז, פּונקט ווי א ראָד, א געאָמעטרישער אָרט. א קויל איז דער געאָמעט־רישער אָרט פון א פּינטל אין רוים, וואס בלייבט שטענדיג אויף דעם גלייכן אָפּשטאַנד פון איינעם א באשטימטן פעסטן פּינטל.

איין גרויסער ראָד צעטיילט דעם קויל אויף צוויי האלבע קוילן, ווי מיר האבן געזעהען; צוויי גרויסע רעדער, ווי אונזערע צוויי מערידיאַנען, צע־טיילן דעם קויל אויף וויפיל (גלייכע) טיילן? אויף פיר טיילן, מען רופט

זיי קוואַדראַנטן (א לאטייניש וואָרט, קוואַדראַרע הייסט טיילן אויף 4 טיילן)· דריי גרויסע רעדער, וואס האבען ניט אלע דעמזעלביגן דיאמעטער, ווי אונזערע צוויי מערידיאַנען און דער עקוואטאָר, צעטיילן דעם קויל אויף אכט טיילן (אָקטאַנטן)· א אַפּעלסין, וואס איז זעהר ענליך צו א קויל, אבער קנאַפּ וואָס אפגעפלאַכט ביי די פּאָלוסן, איז שוין בטבע געטיילט פאזע די מערידיאַנען זיינע· (ביי די אפעלסינען, וואס ווערן אריינגעפירט אין אונזערע קאנטן, ווערט דאס קאָנטיגער, ווען מען שיילט זיי אָפּ·) אנטקעגן זשע, א פילקע האט שוין ניט אזא ספּעציעלן דיאמעטער, וועלכן מיר זאלן קענען באצייכענען אלס א אַקס; מיר קענען אויסקלייבן פּאַר א אַקס וועלכן דיאמעטער מיר ווילן, דעמאָלט וועלן אלע גרויסע רעדער, וואס גייען אַדורך דורך דער אַקס, זיין די מערידיאַנען· די קוילן, וואס מיר באקומען, דרייענדיג א ראָד, זיינען פּאַר דעם געאָמעטר פונקט אזעלכע פעסטע קערפּער, ווי א הארטע הילצערנע פּילקע· זיי האבען א אויבער־פלאַך, וואס ווערט ביים דרייען געשאפן דורך דעם רינג פונם ראָד (דער אויבערפלאַך פון דעם קויל, אדער די ספערע), א אינוויינִיגסטן רוים, וואס ווערט «באשריבן» פון דעם אינוויינִיגסטן רוים פון דעם געדרייטן ראָד, און א דרויסנדיגן רוים, וואס ווערט באשריבן פון דעם דרויסנדיגן רוים פונם ראָד, ווען מיר וועלן זיך פארשטעלן, אז דער דרויסנדיגער רוים פון דעם ראָד דרייט זיך צוזאמען מיטן ראָד· דער אויבערפלאַך פון א קויל האט ניט קיין שום דיק· לאמיר נעמען א פוסטן קויל; ער מעג זיין פון א ווער ווייס ווי דינעם מאטעריאל, זיין ווענטל, חוץ דעם אויבערפלאַך, איז נאָך פּאָרט כולל עטוואָס פון דעם אינווייניגסטן רוים·

אַשטייגער ווי דאס פאפיר איז א גוטער מאָדעל פון א פליין, ווייל עס האט גאר א ווינציגע דיק, אזוי איז איינער פון די בעסטע מאָדעלן פון א אויבער־פלאַך פון א קויל א זייפענער פּענכער (א זייפענבלאָז)·

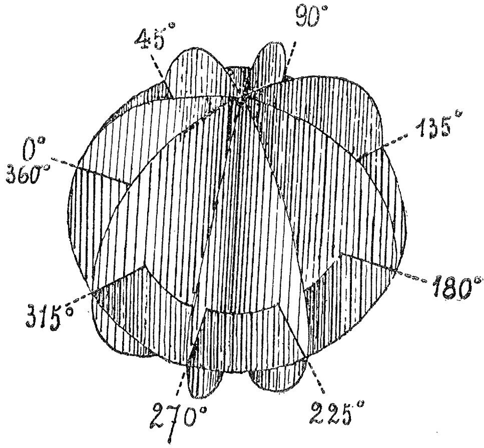
אויף א קויל זעהען מיר אויך קליינע רינגען, וואס פון זיי וועט שפעטער זיין די רייד·

מאָדעל פון א קויל מיט א עקוואַטאָר און מיט 4 מערידיאַנען·

דו קענסט לייכט צוגרייטן א מאָדעל פון א קויל מיט א עקוואַטאָר און מיט ליאד וועלכער צאל פון מערידיאנען; דאס פּאָדערט נאָר מער געדולד·

איך וועל קורץ באשרייבן, ווי מען קען צוגרייטן א מאָדעל מיט פיר מערי-דיאַנען.

שנייד אויס פאָרוויין רעדער פאר די מערידיאַנען, ווי דו האסט עס פריהער געמאכט, צונויפלייגנדיג אפריהערביידע העלפטן פאפיר. אין צוויי פון זיי מאך א שניט פאַזע איין דיאמעטער, איינשניידנדיג דריפערטל פון אים. אין די אנדערע צוויי מאַך א שניט פאזע איין דיאמעטער, אויסשניידנ-דיג א העלפט פון אים פון איין זייט און א פערטל פון אים פון דער אנדערער זייט. די פיר מערידיאַנען קענסטו איצט אריינשטעקן איינעם אין דעם אנדערן. פיר דורך 4 דיאמעטערס אויף דעם ראָד פון דעם עקוואַ-טאָר און באשרייב פון דעמזעלביגן צענטער א ראָד מיט א קלענערן ראדיוס; שנייד ארויס דעם קליינעם ראָד אינגאנצן. אויף די אויפגעצייכנטע ראדיוסן פונם פארבליבענעם ראָד (וואס זעהט איצט אויס ווי א פלאַכער בייגל) מאַך איינשניטן אין דער ריכטונג פון דעם אינוויינינסטן רינג צו דעם דרויסנדיגן, כדי



פיג. 28.

אין זיי זאלן זיך האלטן די מערידיאַנען; אויף די מערידיאַנען מוזטו איצט מאכן איינשניטן פון דרויסן אויף אינווייניג, פון ביידע זייטן פון יענע דיאמעטערס זייערע, וואס דו האסט פריהער ניט איינ-געשניטן (היות ווי די מערידיאַנען זיינען פלאַך צונויפגעלייגט, מאכסטו די זייטיגע איינשניטן אין צוויי מאָל, איין איינשניט פאר אלע פיר מערי-דיאַנען פאראמאל פון איין זייט, דעם צווייטן איינשניט פון דער אנדערער זייט. די איינשניטן מוזן זיין אזוי לאנג, ווי עס באטרעפט די ברייט פון דעם ניט איינגעשניטענעם ברעג פון דעם «בייגל»)[1]. דאס

[1]) גאנץ קליינע קינדער קענען צוגרייטן אזא מאָדעל, ווען מען העלפט זיי א ביסל אונטער; ער געפעלט זיי בעסער, איידער א מאָדעל מיט קנאַפער מערידיאַנען, און ער האַלט זיך זעהר לאנג.

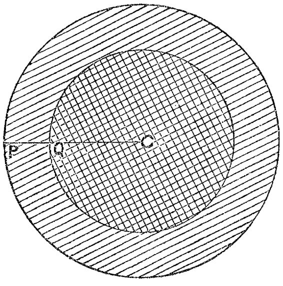
אריינשטעקן פון די מערידיאַנען אין די צוגעגרייטע שפאלטן פונם עק־וואַטאָר פאָדערט געדולד און אויפפאסונג. אבער ווען די איינשניטן זיינען אַפריהער געווען גענוי אויסמארקירט, לאזט זיך דאס לייכט מאכן, אדאנק דער בייגעוודיקייט פונם פאפיר. פיג. 28 ווייזט א פארטיגן מאָדעל אזוינעם. הענגט מען אים אויף אויף א פאָדים און דרייט אים, ווי דעם פריהערדיגן מאָדעל, זעהט מען גרויסארטיג א קויל.

קאָנגרועַנטע רעדער. ווען דו וועסט אויפצייכענען צוויי רינגען מיט גלייכע ראדיוסן, און אויף א אנדער בלאט פאפיר א דריטן רינג, אויך מיט דעמזעלביגן ראדיוס, קענסטו ארויפלייגן דעם צענטער פון דעם דריטן רינג אויף יעדן פון די ערשטע צענטערס; און דעמאלט באדעקט דער דריטער רינג יעדערן פוןביידע אנדערע רינגען, און די רעדער באדעקן זיך אויכעט. דעריבער מוזן ביידע רינגען גערעכנט ווערן פאר גלייכע, לויט דעם פרינציפ פון באדעקונג, און פונקט אזוי אויך די רעדער. אזעלכע רעדער (רינגען) רופט מען ק אָ נ ג ר ו ע נ ט, דאס הייסט, אז יעדער פון זיי לאזט זיך גענוי באדעקן מיט דעם אנדערן.

«ק אָ נ ג ר ו ע נ ט» איז מער ווי «ג ל י י ך». ווארום «ג ל י י ך» הייסט, אז צוויי זאַכן זיינען געראטן איינע אין דער אנדערער אין עפעס א פרט. אקעגען הייסט «ק אָ נ ג ר ו ע נ ט», אז די זאכן זיינען אין אלע פרטים געראטן איינע אין דער אנדערער, אחוץ דעם אָרט, וואו יעדע פון זיי ליגט צופעליג.

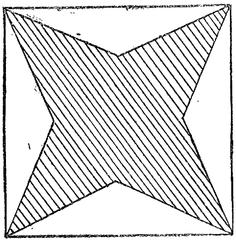
דו וועסט באלד דערגיין וועגן זאכן, וואס קענען זיין גלייך איינע דער אנדערער אין געוויסע פרטים, ניט זייענדיג קאָנגרועַנט. אלע פיגורן, וואס מיר האבן מיט זיי געהאט צו טאן ביז איצט, גלייכע ליניעס, גלייכע ווינקלען זיינען פאראיינס געווען אויך קאָנגרועַנט, און ערשט דורך זייער קאָנ־גרועַנטקייט האבן מיר דערקענט, אז זיי זיינען גלייך. א גראָדע ליניע (א אָפשניט) האט, חוץ איר לאגע, בלויז איין אייגענשאפט, דורך וועלכער מיר דערקענען זי, דאס איז איר «לענג»; דעריבער האב איך בנוגע דער גראָדער באנוצט דאס ווארט «גלייך» אנשטאט «קאָנגרועַנט». אבער א ראָד האט דריי ע ל ע מ ע נ ט ן, דורך וועלכע ער ווערט באשטימט: זיין ראדיוס, זיין שטח און די קרומער ליניע פונם רינג. ווען די ראדיוסן זיינען גלייך, זיינען די ביידע אנדערע עלעמטן אויך גלייך. דעריבער זיינען קאָנגרועַנטע רעדער גלייך אין דריי פרטים: זיי האבן גלייכע ראדיוסן, גלייכע שטחס און גלייכע רינגען.

קאָנצענטרישע רעדער. צוויי רעדער מיט דעמזעלביגן צענטער הייסן קאָנצענטריש (פיג. 29). ווען דו וועסט זיך צוקוקן צו זיי, וועסטו זעהן, אז דער ראָד מיט דעם קלענערן ראַדיוס ליגט אינגאנצן אינווייניג אין דעם אנדערן. פאר וואס איז דאס אזוי? דערפאר, ווייל יעדער פינטל פונם רינג מיטן גרעסערן ראַדיוס האט א אָפּשטאַנד פונם צענטער, וואס איז גרעסער, איידער דער ראַדיוס פונם קלענערן ראָד. דעריבער ליגט יעדער פינטל פונם רינג מיטן גרעסערן ראַדיוס דרויסן פונם רינג מיטן קלענערן ראַדיוס. אויף אזא שטייגער ליגט יעדער פינטל פונם רינג מיטן קלענערן ראַדיוס אויף אזא אָפּשטאַנד פון דעם בשותּפותדיגן צענטער, וואס איז קלענער פון דעם ראַדיוס פון דעם אנדערן ראָד; ער ליגט, הייסט עס, אינווייניג אין אים.



פיג. 29.

דעריבער איז דער ראָד מיט דעם קלענערן ראַדיוס א טייל פון דעם ראָד מיט דעם גרעסערן ראַדיוס, און מיר זאגן, דער ראָד מיטן קלענערן ראַדיוס האט א קלענערן שטח. דער רינג פונם ראָד מיטן קלענערן ראַדיוס איז אבער ניט א טייל פון דעם רינג פונם ראָד מיטן גרעסערן ראַדיוס, דעריבער קענען מיר נאָך ניט זאגן, אז דער ראָד מיט דעם קלענערן ראַדיוס האט א קלענערן רינג (אדער פעריפעריע), מחמת מיר ווייסן נאָך קיין זאַך ניט וועגן דעם פּרט.


פיג. 30.

אויף דער פיגור 30 זעהסטו א געמעל פון א קוואַדראַט, און אין אים א געצאקטע ליניע. פונקט ווי א רינג, שליסט אויך זי איין א טייל פונם פליין (א שטערן), וואס ליגט אינגאנצן אינ־ווייניג אין קוואַדראַט. ווען דו וועסט אפלייגן אויף דיין פאפירענער ווירע די לענג פון יעדן פון די אַכט אָפּשניטן, וואס בילדן די געצאקטע ליניע, וועסטו זעהן, אז די לענג פון זיי אלע צוזאמען איז גרעסער ווי די לענג פון אלע זייטן פון דעם קוואַדראַט. דערפון קענסטו דרינגען, אז ווען איין שטיק פליין ליגט אינגאנצן אינווייניג אין א אנדער שטיק פליין, קענען מיר ניט אלעמאל זאגן, אז די ראַם פון דעם ערשטן איז קלענער ווי די ראַם פון דעם צווייטן (ווען א געצאקטע

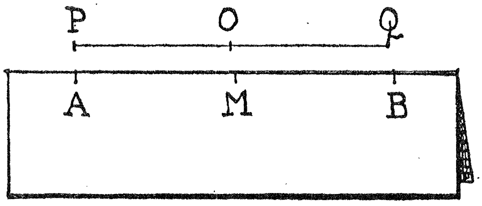
ליניע שליסט אײן א טײל פון פלײן, הײסט די געצאקטע ליניע די ראַם אדער דער פּעריםעטער פון דעם אײנגעשלאסענעם פלײן; די ראַם פון א קוואַדראַט, די ראַם פון א שטערן)· דעריבער האב איך דיר געזאגט, אז דו װײסט נאָך דערװײל גארנישט װעגן די רינגען פון קאָנצענטרישע רעדער· די פראגע װעגן דער לענג פון א רינג איז זעהר א שװערע· דו קענסט זי ניט תופש זײן, אײדער דו װעסט האבן געלערנט א פולע אנדערע ידיעות· אבער די שטח׳ס קען מען לײכטער פארגלײכן· יעדער ראָד מיט א קלענערן ראדיוס פארנעמט א קלענערן שטח, אײדער א ראָד מיט א גרעסערן ראדיוס· װארום מיר קענען אויפצײכענען א דריטן ראָד, װאס זאל זײן קאָנצענטריש מיטן ערשטן און קאָנגרועגט מיטן צװײטן· אטדער דריטער ראָד װעט פארנעמען א קלענערן שטח, װי דער צװײטער, אבער דעמזעלביגן שטח װי דער ערשטער· דעריבער פארנעמט דער ערשטער ראָד קנאפּער שטח, אײדער דער צװײטער·

טײלונג פון א אָפּשניט·

§ 9. טײלונג פון א אָפּשניט אויף העלפט·

מיר האבן געזעהען, אז דער דיאמעטער פון א ראָד װערט צעטײלט אינם צענטער אויף צװײ גלײכע טײלן· מיר זאגן: דער צענטער טײלט דעם דיאמעטער אויף העלפט·

מיט דער פּאפּירענער װירע קענען מיר לײכט פארלענגערן א אָפּשניט אויף זײן אײגענער לענג· אבער װי טײלט מען א אָפּשניט PQ אויף צװײ גלײכע טײלן, אויף העלפט?



פיג׳ 31·

דאס מאכן מיר דערװײלע אויך מיט דער װירע· מאַך זיך אויף דער װירע די סימנים A און B (פּאסקעס), אזוי װי דו האסט זײ שוין פריהער אַמאָל געמאכט, בײג אַײן די פּאפּירענע װירע אזוי, אז A און B זאָלן צונויפפאלן און בײדע טײלן פון דעם ראנד זאָלן אקוראַט ליגן אײנער אויפן אנדערן (פיג׳ 31)·

איצט לייג צונויף די ווירע גאַנץ פלאַך און קנייטש זי שאַרף איין אין דעם בייג· דער קנייטש איז געוואוינטליך א גראָדע ליניע און שניידט דעם ראַנד אין א פינטל M, און $MA = MB$, ווארום זיי באדעקן זיך דאָך· בכן, איז AB צעטיילט אויף העלפט אין M·

איצט לייג ארויף A אויף P, און B אויף Q, וועט AB באדעקן PQ· אויף PQ מוז דאָך זיין א פינטל, וואס איז באדעקט מיטן פינטל M· צייכן אים אָן און באצייכן אים מיט O· דעמאָלט איז PQ אין O צעטיילט אויף העלפט·

אזוי ווייזט עס לכל־הפחות אויס· ווי דערגייעָן מיר, אז אזוי איז עס טאקע?

דערצו העלפט אונז אונזער אקסיאמע: צוויי גרייסן זיינען גלייך איינע דער אנדערער, ווען יעדע פון זיי איז גלייך א דריטער גרייס· מיר דארפן גאר ניט פראבירן אפריהער באדעקן די אָפשניטן PO און OQ מיטאנאנדער· ווארום PO איז געווען באדעקט מיט AM, דעריבער איז:

$$PO = AM$$

און, היות ווי OQ איז געווען באדעקט מיט MB, איז:

$$OQ = BM$$

אבער עס איז דאך

$$AM = MB,$$

ווארום דיביידע אָפשניטן האבן געוועזט באדעקט איינער דעם אנדערן, בשעת מיר האבן צונויפגעקנייטשט די ווירע· בכן איז לויט אונזער אקסיאמע:

$$OQ = AM, \quad \text{און} \quad PO = OQ·$$

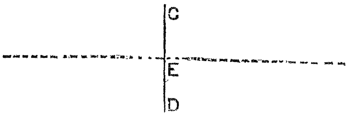
דאס הייסט PQ איז אין O געטיילט אויף העלפט·

אָט האבן מיר געבראכט אלע טעמים, ניט איבערלאזנדיג א ניט איין איינציגן· דאס רופט מען: ברענגען א באווייז, א ראיה· אָפטמאלס טרעפט זיך, אז עפעס «זעהט אויס» אזוי, גלייכווי ס'וואלט געווען ריכטיג, הגם עס קען גאר זיין, אז מיר האבן פאלש געצייכנט אדער שלעכט גע־קנייטשט; דעמאלט איז נויטיג, אז מען זאל קענען ברענגען א באווייז· ווען דו ביסט ביכולת צו ברענגען אלע טעמים דיינע קלאָר און אין א ריכטיגן סדר, רופט מען דאס א לאָגישע ראיה, אדער בקיצור אויך לאָגיקע· דו מוזט זעהן אויסלערנען צו טראכטן לאָגיש, ניט ארויס־זאגן קיין סברות, קיין השערות, נייערט ברענגען די נויטיגע טעמים פאר דיין מיינונג· די געאָמעטריע וועט דיך לערנען צו טראכטן לאָגיש·

איצט צייג זיך איבער, קנייטשנדיג, אז PQ איז בפועל ממש צעטיילט אין O אויף העלפט.

צעטיילנדיג די העלפטן אויף העלפט און נאָכאמאל אויף העלפט און אזוי ווי, קענען מיר צעטיילן דעם געגעבענעם אָפשניט אויף 2, 4, 8, 16 ... גלייכע טיילן.

פינטלעך, וואס דעקן זיך ביים קנייטשן. ווען מיר קנייטשן איין א שטיק פאפיר פאזע א גראָדער, וואס ווייסן מיר בנוגע די פינטלעך, וואס באדעקן זיך דערביי? שטעך דורך מיט דער שפילקע א לעכל דורך דיין איינגעקנייטשטן פאפיר. עפן איצט דאס בלאט און באצייכן די צוויי קליינע לעכלעך, איינס מיט C, דאס אנדערע מיט D. C און D זיינען א פּאָר פינטלעך, וואס האבן זיך געדעקט. וואס ווייסן מיר וועגן זיי?



פיג. 32.

פארבינד C מיט D, און זאל דער שניטפינטל פון CD מיט דעם קנייטש זיין E. מיר ווייסן, אז

$$CE = ED,$$

ווייל E ליגט אויפן קנייטש און C איז געוועזט צונויפגעפאלן מיט D, דאס הייסט CE און ED דעקן זיך (אנשטאט «באדעקן איינער דעם אנדערן» זאגט מען «דעקן זיך»); בכן, ווייסן מיר וועגן די צוויי פינטלעך C און D, וואס דעקן זיך, אז די גראָדע וואס פארבינדט זיי לאזט זיך ארויפקנייטשן אויף זיך גופא, און אז דער קנייטש צעטיילט זי אויף העלפט.

איינניטונג.

נעם וואס פאַר ניט איז גראָדע און אויף איר 2 פינטלעך B און C. צעטייל מיט דיין ווירע BC אין M אויף העלפט. באשרייב צוויי רינגען פון די צענטרס B און C מיט גלייכע ראדיוסן, וואס זאלן זיין גלייך אדער כמעט גלייך BC. דו וועסט זעהן, אז די רינגען שניידן זיך אין צוויי פינטלעך A און D. ווייז אפריהער מיט דיין ווירע און אַנאָך דורך א קנייטש, אז A, M און D ליגן אויף איין גראָדער.

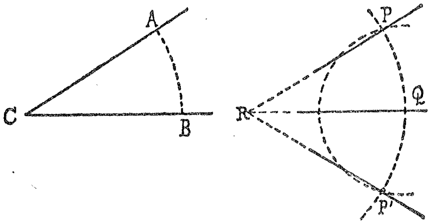
גלייכקייט פון ווינקלען.

§ 10. גלייכע ווינקלען.

מיט דער הילף פון דעם פאפירענעם מאָדעל פון א ווינקל קענען מיר אויפצייכענען א ווינקל, וואס איז גלייך א אנדער ווינקל, פונקט ווי מיר האבן באנוצט די פאפירענע ווירע אויף צו פירן גלייכע אָפשניטן. נעם א ווינקל ACB און מאך פון אים א פאפירענעם מאָדעל, ווי אין § 6. לייג ארויף דעם מאָדעל אויף דיין בלאט פאפיר און פיר דעם בליישטיפט פאזע די קאַנטן פון דעם מאָדעל, וועסטו באקומען א ווינקל PRQ. לויטן פרינציפ פון באדעקונג איז אטדער ווינקל גלייך דעם ווינקל ACB, ווארום דער פאפירענער מאָדעל באדעקט יעדן פון זיי, דאס הייסט יעדער פון זיי איז אים גלייך. אבער צוויי גרייסן זיינען גלייך איינע דער אנדערער, ווען יעדע איז גלייך א דריטער גרייס.

עס איז בעסער, פירנדיג דעם בליישטיפט פאזע דעם מאָדעל, ניט דער־פירן אים ביזן שפיץ פונם ווינקל, ווארום אניט וועט דער שפיץ ארויס־קומען ניט גענוי. בעסער איז פירן דעם שטיפט ביז נאהנט צום שפיץ און דערנאך פארלענגערן די זייטן פונם ווינקל מיט דער ווירע, ווי ס'איז גע־וויזן מיטן פונקטור אויף דער פיגור 33.

אנשטאט צו צייכענען דעם ווינקל, קענסטו אים אויך אויסקנייטשן אוועקלייגנדיג א בלאט פאפיר מיט זיין ראנד אויף AC און אקוראט אריבער־קנייטשנדיג עס פאזע CB. דע־מאלט וועסטו אויסקנייטשן א ווינקל, וואס איז גלייך ACB.



פיג׳ 33.

פילפאַכיגע פון א ווינקל. [דערקלערונג.

א גאנצע צאל הייסט א פיל־פאַכיגע פון א אנדער גאנצער צאל, ווען די ערשטע גאנצע צאל טיילט זיך אהן א רעשט אויף דער צווייטער, אדער, אנדערש גערעדט, ווען די ערשטע גאנצע צאל איז אין א גאנצער צאל מאָל גרעסער, ווי די צווייטע. למשל 10 איז א פילפאכיגע פון 2 און א פילפאכיגע פון 5. אדער

30 איז א פילפאכיגע פון 2 און פון 3 און פון 5 און פון 6 און פון 10 און פון 15.] מיט דער הילף פון דעם פאפירענעם מאָדעל קען מען לייכט פארטאָפּלען א ווינקל. דערצו דארפן מיר אויפצייכענען אויף דער אנדערער זייט RQ א ווינקל P'RQ, וואס איז גלייך דעם געגעבענעם ווינקל ACB מיט דעמזעלביגן שפיץ R און דערזעלביגער זייט RQ (פיג. 34). אויפן זעלביגן שטייגער קען מען באנוצן דעם מאָדעל צו קאנסטרואירן א דרייפאכיגן, א פירפאכיגן און בכלל א פילפאכיגן פון דעם געגעבענעם ווינקל[1].

דער זעהווינקל. דו קענסט זיך צוגרייטן א מאָדעל פון דעם זעה־ווינקל, אונטער וועלכן דער אָפּשניט AB באווייזט זיך אין דיין אויג. נעם דערצו א בלאט פאפיר מיט גלאטע, גראָדע רענדער און האלט עס מיט איין עק זיינעם Q הארט ביי דיין אויג. פארמאך דאס אנדער אויג, און טו א דריי דאס בלאט אזוי, אז איינער פון זיינע קאַנטן, דהיינו QP זאל ליגן אויף איין גראָדער ליניע מיט A; דער אנדער קאַנט, וואס גייט ניט אַדורך דורך Q, וועט ליגן, ווי עס וועט זיך דוכטן, פאזע AB. אויב AB איז ניט צו לאנג, וועט זיך אויף דעם צווייטן קאַנט געפינען א פינטל R, הינטער וועלכן עס וועט ליגן, דוכט זיך, B. קנייטש איין QR, דעמאלט וועט PQR, מער ווייניגער גענוי, גלייך זיין דעם זעהווינקל, אונטער וועלכן AB בא־ווייזט זיך אין דיין אויג.

אין די געדאנקען קענען מיר די שטראלן, וואס גייען פון דיין אויג צו A און צו B, פארלענגערן אריבער A און B. ווען מיר וועלן דאן אוועק־נעמען AB, וועלן מיר קענען דערזעהען א צווייטן אָפּשניט A_1B_1 (A פרים B פרים, אדער A איינס B איינס), וואס באווייזט זיך אין אונזער אויג אונטער דעמזעלביגן זעהווינקל, ווי פריהער AB. אויב אזוי, מוז A_1B_1 גרעסער זיין, ווי AB. וואס ווייטער A_1B_1 ליגט, אלץ גרעסער מוז עס זיין, ווען עס באווייזט זיך אין דיין אויג אונטער דעמזעלביגן זעה־ווינקל PQR, אונטער וועלכן פריהער האט זיך באוויזן AB.

ווען דו וועסט צוקלעפן א זילבערנעם האלבן רובל צו דער שויב פון דעם פענסטער און דו וועסט אפגיין פונם פענסטער אזוי ווייט, אז דיין אויג זאל אפשטיין אן ערך $1^1/_4$ מעטער פון דער מטבע, וועט דער ווינקל, אונטער וועלכן די מטבע באווייזט זיך אין דיין אויג, באטרעפן אן ערך

[1]) דער לערער וועט זיך מוזן אומקערן צו דעם קאפיטל, דורכגייענדיג די לעצטע אפזאצן פון § 12, און דערביי דערקלערן, אז פילפאכיגע פון ווינקלען קענען זיין אויסגעפוקלטע ווינקלען, און אפילו גרעסער פון 4 גראָדע ווינקלען.

איין גראַד· ווען דו וועסט זיך אוועקשטעלן צוויי מאל אזוי ווייט פון דער מטבע, דאס הייסט אויף $2\frac{1}{2}$ מעטער, וועט די מטבע (די זילבערנע) אויסזעהען אזוי גרויס, ווי די זון אדער ווי די פולע לבנה· אויב די לבנה וועט שיינען דורך דער שויב, און די מטבע וועט ליגן ריכטיג צווישן דער לבנה און צווישן דיין אויג, וועט די מטבע אינגאנצן פארדעקן די לבנה· די גרייס פון דער מטבע קענסטו, די גרייס פון דער לבנה ־ ניט, ווייל זי איז צו ווייט· דו ווייסט אבער, אז די לבנה מוז זיין אַסך־אַסך גרעסער, איידער די מטבע, און פונדעסטוועגן באווייזט זיך דער דיאמעטער פון דער לבנה און פון דער מטבע אונטער דעמזעלביגן זעהווינקל אין דיין אויג, ווען דו שטייסט אויף א מהלך פון $2\frac{1}{2}$ מעטער פון דער מטבע· אטדעם ווינקל רופט מען דעם געדוכטן דיאמעטער פון דער לבנה (ווייל ער דוכט זיך אויס אזוי גרויס)· ער באטרעפט $\frac{1}{2}$ גראַד· דער געדוכטער דיאמעטער פון דער זון איז אַן ערך אויך אזוי גרויס·

א גראַד איז א זעהר פּאַסיגער איינס צו מעסטן אלע ווינקלען, וואס קענען פּאָרקומען (אזוי ווי א מעטער איז א איינס צו מעסטן די לענג, א סאנטימעטער איז אויך א איינס צו מעסטן די לענג, אבער א קלענערער איינס; א פוס איז אויך א איינס פאַר לענג; א קוואָרט אדער א ליטער אדער א גלאָז איז א איינס צו מעסטן פליסיגקייטן)· ווי דו האסט גע־זעהען, איז א גראַד זעהר א קליינער ווינקל· ווען מען וויל אנרופן די גרייס פון א ווינקל, רופט מען אָן די צאל פון גראַדן, וואס ער אַנטהאלט· אבער א גראַד טויג ניט אויף צו צייכענען אדער אויף אויסצומעסטן ווינק־לען, מחמת ער איז צו קליין· דעריבער לאָזט זיך א ווינקל פון מיטעלער גרייס, ווי למשל ABC אויף פיג· 34, ניט קאָנסטרואירן מיט דער הילף פון א מאָדעל פון א ווינקל פון 1 גראַד· דער ווינקל ABC אויף דער פיג· 34 האלט 30 גראַד· מיר שרייבן דאס אזוי: $30°$· עס איז פארהאן א פולע ווינק־לען, וואס מען קען זיי זעהר לייכט צייכענען אדער אויסקנייטשן, און דו וועסט זיך ביסלעכווייז אויסלערנען אפשאַצן זיי מיט א גענויגענער גע־נויקייט· דער ווינקל פון $30°$ איז איינער פון זיי· צומלייכטסטן דערקענט מען דעם ווינקל פון $90°$, אדער, ווי מען רופט אים, דעם גראָדן ווינקל·

קאָנסטרוקציע פון א ווינקל, וואס איז גלייך א געגעבע־נעם ווינקל· ווען אונז איז געגעבן א אויפגעצייכנטער אדער א אויסגע־קנייטשטער ווינקל, און מיר ווילן קאָנסטרואירן א ווינקל, וואס איז אים

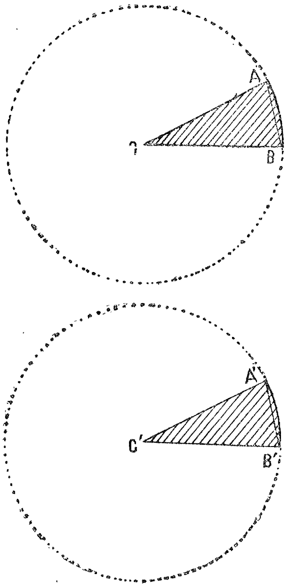
גלייך, איז דער מעטאָד פון אויסקנייטשן געגויער, איידער דער מעטאָד פון צייכענען· עס איז אבער דאָ נאָך אן אנדער מעטאָד, ווי אזוי צו קאָנסטרואירן א ווינקל גאנץ גענוי אהן א מאָדעל· לאמיר אננעמען, אז דער שפּיץ R פון דעם פארלאנגטן ווינקל און איינע פון זיינע זייטן RQ זיינען געגעבן, דעמאָלט קען דער ווינקל קאָנסטרואירט ווערן אויף יעדער זייט פון RQ, ווענדט זיך אויף וועלכער זייט פון RQ מ'ויל לייגן ארויף דעם מאָדעל פון דעם ווינקל· זאלן דאָס זיין די ווינקלען PRQ און P_1RQ (פיג· 34) וואס יעדער פון זיי איז גלייך דעם געגעבענעם ווינקל ABC· לאמיר זאגן, אז דער מאָדעל ליגט אויף דעם געגעבענעם ווינקל· לאמיר באצייכענען דעם שפּיץ פון דעם מאָדעל מיט C_1, און די פּינטלעך, וואס דעקן זיך מיט A און B, באצייכענען מיר מיט A_1 און B_1, דעמאלט איז דער אָפשניט A_1B_1, מחמת ער באדעקט AB, גלייך AB· ווען מיר וועלן דעם מאָדעל ארויפלייגן אויף PRQ, וועט דער פּינטל P צונויפפאלן מיט A און דער פּינטל Q מיט B, וועט דאָך PQ, צוליב דעמזעלביגן טעם, זיין גלייך צו A_1B_1 און בכן אויך צו AB· דערפון איז געדרונגען אטוואס:

צייכן אויף א ראָד מיטן צענטער אין R (פיג· 33) און מיט א ראדיוס גלייך CA, און א צווייטן ראָד מיטן צענטער אין Q און מיט א ראדיוס גלייך BA;ביידע רעדער וועלן דורכגיין, ווי דער שכל טראָגט אויס, דורך P און אויך דורך P_1· חוץ די צוויי פּינטלעך האבן זיי ניט קיין אנדערע בשותפותדיגע פּינטלעך· דאס גיט אונז א נייעם מעטאָד צו צייכענען ווינקלען, דהיינו: באשרייב א ראָד מיט דעם צענטער C און מיט ליאַד וועלכן ראדיוס, וואס שניידט די זייטן פון דעם געגעבענעם ווינקל אין צוויי פּינטלעך A און B; באשרייב א צווייטן ראָד מיט דעמזעלביגן ראדיוס און מיט דעם צענטער אין דעם געגעבענעם שפּיץ R, און זאל דער צווייטער ראָד דורכשניידן די ליניע, וואס איז אונז געגעבן, אלס איין זייט פון דעם פארלאנגטן ווינקל, אין Q· איצט באשרייב נאָך א ראָד מיט א ראדיוס, גלייך AB, און מיט דעם צענטער אין Q; דער לעצטער ראָד שניידט דעם ערשטן אין צוויי פּינטלעך, צו איין פּינטל אויף יעדער זייט פון RQ· ווען מען וועט איטליכן פון זיי, P אדער P_1, פארבינדן מיט R, וועט מען באקומען דעם פארלאנגטן ווינקל·

צענטראלע ווינקלען פון א ראָד· צייכן א ראָד, באצייכן זיין צענטער מיט C און קאָנסטרואיר וואסער ניט איז ווינקל מיט דעם שפּיץ

אין C. מיר ווייסן, אז דער ראָד וועט יעדע זייט פון דעם ווינקל שניידן אין איין פינטל. באצייכן אָטדי פינטלעך אויףביידע זייטן פונם ווינקל מיט A און B (פיג. 34). אזא ווינקל ACB הייסט א צענטראלער ווינקל.

ביידע טיילן, אויף וועלכע דער ווינקל צעטיילט דעם רינג פונם ראָד, און וואס איינער פון זיי ליגט אינווייניג אינם ווינקל, דער אנדערער דרויסן פון דעם ווינקל, הייסן בויגנס פון דעם רינג אדער פון דעם ראָד. מען רופט זיי בויגנס, ווייל זיי זעהען אויס ווי פיילנבויגנס. די עקן פון א פיילנבויגן זיינען פארבונדן מיט א שטייף אנגעצויגענעם שנור. דער שנור פון א פיילנבויגן הייסט אויף גריכיש «כאָרדאַ». דעריבער רופן מיר אויך דעם אָפשניט AB, וואס פארבינדט די עקן פונם בויגן פון דעם ראָד, אויכעט די כאָרדע פון דעם בויגן, אדער בקיצור די כאָרדע. דער בויגן, וואס ליגט אינווייניג אינם ווינקל, הייסט דער בויגן, אויף וועלכן דער ווינקל שטייט, אדער דער בויגן, אויף וועלכן דער ווינקל איז אנגעשפאַרט. דער צווייטער בויגן, אויף דער פיגור 34 פונקטירט, הייסט דער דערפילנדיגער בויגן פון דעם ערשטן בויגן, און אומגעקערט. דערפילנדיגע בויגנס האבן גלייכע כאָרדעס. ווען מיר צייכענען א קאָנגרוענטן ראָד מיטן צענטער אין C_1,



פיג. 34.

און א ווינקל, א גלייכן צו ACB, מיט דער שפיץ אין דעם צענטער C_1, און די פינטלעך, אין וועלכע דעם ווינקלס זייטן שניידן זיך מיטן ראָד, באצייכענען מיר מיט A_1 און B_1, און מיר לייגן ארויף C_1 אויף C, און שטעקן דורך א שפילקע דורך ביידע צענטערס, און דרייען דאס אויבערשטע בלאט פאפיר, — קענען מיר ארויפברענגען A_1 אויף A; אבער מחמת די ווינקלען זיינען גלייך, וועט זיך דעמאלט B_1 ארויפלייגן פונקט אויף B, אויב נאָר B און B_1 ליגן אויף דערזעלביגער זייט פון CA; טאמער ליגן אבער B און B_1 אויף פארשיידענע זייטן פון CA, דארף מען B_1 א דריי טאָן אויף צוריק, ביז ער וועט באדעקן A, דעמאלט וועט A_1 ליגן

איבער B· איןביידע פאלן וועלן די בויגנס, אויף וועלכע עס שטייען די גלייכע ווינקלען ACB און $A_1C_1B_1$ באדעקן איינער דעם אנדערן, און זייערע דערפילנדיגע בויגנס וועלן זיך אויכעט דעקן· דעריבער מוזן מיר, אויפן סמך פון דעם פרינציפ פון באדעקונג, זאגן, אז די בויגנס זיינען פארוויז גלייך[1]· דאס הייסט: אין קאָנגרועטע רעדער זיינען גלייכע צענטראלע ווינקלען אנגעשפארט אויף גלייכע בויגנס; די דערפילנדיגע בויגנס זיינען אויך גלייך·

דו קענסט אויך לייכט ווייזן, אז אין יעדן ראָד שטייען גלייכע ווינקלען אויף גלייכע בויגנס· דו דארפסט נאָר אזוי ארויפלייגן דעם ראָד מיט 2 גלייכע צענטראלע ווינקלען אויף א קאָנגרועטן ראָד מיט איינעם, פונקט אזא גרויסן, ווינקל, אז די צענטערס זאלן צונויפפאלן, און דרייען דעם אויבערשטן ראָד· עס וועט גוט זיין, ווען דו וועסט זיך איינגיטן דעריין·

איינגיטונגען.

1· ווייז, אז אין קאָנגרועטע רעדער שטייען גלייכע צענטראלע ווינקלען אויף גלייכע כאָרדעס·

2· ווייז, אז אין יעדן ראָד זיינען גלייכע צענטראלע ווינקלען אנגעשפארט אויף גלייכע כאָרדעס·

3· ווייז, אז אין קאָנגרועטע רעדער האבן גלייכע בויגנס גלייכע כאָרדעס·

4· ווייז, אז אין יעדן ראָד האבן גלייכע בויגנס גלייכע כאָרדעס·

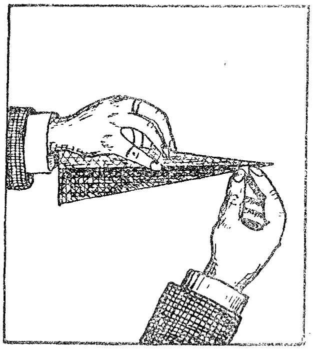
טיילונג פון ווינקלען·

§ 11. טיילונג פון א ווינקל אויף העלפט מיט דער הילף פון א מאָדעל·

דו קענסט צעטיילן א ווינקל אויף העלפט, פונקט ווי מען צעטיילט א אָפשניט אויף העלפט· דערצו דארפסטו צוגרייטן א מאָדעל פון דיין ווינקל און איינקנייטשן אים אזוי, אז איין גראָדער ראנד זיינער זאָל ליגן אויף דעם אנדערן· עס וועט דיר זיין שווער איינצוקנייטשן דעם מאָדעל אקוראט אין דעם שפיץ· אבער עס איז גענוג, ווען דו וועסט איינקנייטשן דעם

[1]) דער לערער קען דאָ אדער שפעטער דערקלערן, אז דער פרינציפ פון באדעקונג איז ניט קיין לאָגישער, נייערט א עמפירישער·

מאָדעל נאָר כמעט ביז צום שפּיץ, און וועסט דעם מאָדעל באַנוצן ווי א ווירע, און דערנאָך מיט דיין שטענדיגער פּאַפּירענער ווירע פאַרלענגערן די גראַדע, וואס טיילט דעם ווינקל אויף העלפט. עס וועט אויך גוט זיין, ווען דו וועסט איינעם פון די רענדער פונם מאָדעל אָפּבייגן, און זיין בייג אריינ־לייגן אין דעם צווייטן ראַנד, און צוריק אריבערבייגן איבער אים דעם אָפּגעבייגטן ראַנד, פעסט איינקנייטשנדיג אים (פיג. 35). דעמאָלט וועסטו באַקומען א מאָדעל פון א האַלבן ווינקל ACB מיט צוויי איינגעקנייטשטע קאַנטן (פיג. 35).

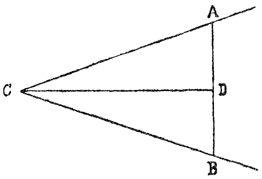

פיג. 35.

איצט לאָמיר מיט דעם מאָדעל צעטיילן אונזער ווינקל ACB אויף העלפט. לייג אַרויף דעם שפּיץ פון דעם מאָדעל אויף C און איינעם פון זיינע קאַנטן אויף CB, און פיר דעם בליישטיפט פאַזע דעם צווייטן קאַנט פונם מאָדעל. די דורכ־געפירטע גראַדע, וועלכע מיר וועלן אָנ־רופן DC, טיילט דעם ווינקל ACB אויף העלפט. דו וועסט געפינען, אז עס איז שווער צו צעטיילן דעם ווינקל אויף העלפט אויף אזא שטייגער; איך וועל דיר שפּעטער ווייזן א בעסערן וועג אויפצולייזן דעמזעלביגן אויפגאַבע.

דער שטראַל, וואס דו האסט געצייכנט אויף אזא שטייגער, ליגט ממילא אינווייניג אינם ווינקל. ווען דו וועסט אים פאַרלענגערן איבער C אַריבער, וועסטו באַקומען דעם גאַנג פון דער גאַנצער ליניע, וואס דער שטראַל איז א טייל פון איר, און ווען דו וועסט איינקנייטשן דיין פּאַפּיר פאַזע אטדער גראַדער, וועלן זיך ביידע זייטן פון דעם ווינקל דעקן; ניט בלויז דער אינווייניגסטער רוים פון דעם ווינקל פאַלט צונויף מיט זיך גופא, נייערט אויך דער דרויסנדיגער רוים. געוואוינליך, ווען מיר ריידן וועגן דער גראַדער, וואס טיילט דעם ווינקל אויף העלפט, מיינען מיר דאס דעם שטראַל, וואס ליגט אינווייניג אין דעם ווינקל. דו זעהסט, אז אטדער שטראַל וועט שניידן יעדן אָפּשניט, וואס זיינע עקן ליגן אויף די זייטן פון דעם ווינקל. די אנדערע האַלבע גראַדע, ד. ה. דער שטראַל אין דער אַנטקעגנדיגער ריכטונג, וועט ניט שניידן אזא אָפּשניט.

די גראַדע, וואס טיילט א ווינקל אויף העלפט, רופט מען ביסעקטאָר.

טיילונג פון א ווינקל אויף העלפט אהן דער הילף פון א מאָדעל. לאָמיר אויסקלייבן צוויי פינטלעך A און B אויף די זייטן פון דעם ווינקל ACB אזוי, אז CA = CB. זאל זיין, אז דער ביסעקטאָר שניידט די גראָדע AB אין D (פיג. 36). ווען מיר וועלן איינקנייטשן דאס פאפיר פאזע CD, וועלן זיך ביידע ווינקלען DCA און DCB דעקן, און CB וועט זיך דעקן מיט CA, און בכן אויך B מיט A, ווארום CA = CB. דאס הייסט, אז AB איז דורך דעם קנייטש צעטיילט אויף העלפט, אדער, אנדערש גע־רעדט, אז D איז דער מיטן פון AB.



פיג. 36.

דאס גיט דיר א מעטאָד, וויאזוי צו צעטיילן דעם ווינקל ACB אויף העלפט, ניט באנוצנדיג א מאָדעל, בלויז מיט דער הילף פון דיין פאפירענער ווירע, און אטדער מעטאָד איז פראקטיש דער לייכטסטער און דער גע־נויסטער. דו דארפסט נאר אָפּלייגן גלייכע אָפּשניטן אויף די זייטן פון דעם ווינקל, פארבינדן די עקן A און B, צעטיילן אויף העלפט דעם אָפּ־שניט AB און פארבינדן דעם מיטן D פון AB מיט דעם שפיץ C. דעמאלט איז CD דער ביסעקטאָר. אויף אזא שטייגער קענען מיר, טיילנדיג יעדע העלפט פון ווינקל נאָכאַמאָל אויף העלפט, צעטיילן דעם געגעבענעם ווינקל אויף 4, 8, 16 ... גלייכע טיילן.

איינניטונגען.

ACB איז א ווינקל מיט גלייכע זייטן; ווייז, אז יעדער פינטל, וואס שטייט אָפּ גלייך ווייט פון A און פון B, ליגט אויפן ביסעקטאָר פון דעם ווינקל ACB. מיט אנדערע ווערטער: ווייז, אז דער ביסעקטאָר פון דעם ווינקל איז דער געאמעטרישער אָרט פון אלע פינטלעך, וואס זייער אָפּ־שטאנד פון A איז גלייך זייער אפשטאנד פון B.

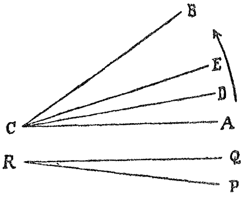
(ווייל מיר קענען אזוי איינקנייטשן דאס בלאט פאפיר, אז אזא פינטל זאל זיין «פיקסירט», ד. ה. ער זאל בלייבן אויף זיין אָרט, און A זאל באדעקן B.)

פארגלייכונג פון אומגלייכע ווינקלען.

§ 12. גרעסערע און קלענערע ווינקלען.

ווען מיר האבן צוויי ווינקלען, ACB און PRQ, קענען מיר צוגרייטן א מאָדעל פון PRQ און ארויפלייגן דעם ראנד RP אויף CA; דעמאלט וועט דער שטראל RQ (פון דעם מאָדעל) זיך אוועקלייגן אדער אויף CB, אדער אינוויינינג אינם ווינקל ACB, אדער דרויסן פון ACB. אין דעם ערשטן פאל זאגן מיר: ACB און PRQ זיינען גלייך. אין דעם צווייטן און דריטן פאל קענען מיר ניט זאגן, אז איין ווינקל איז גלייך צו א טייל פון דעם אנדערן, הגם אין דעם צווייטן פאל דעקט דער אינוויינינגסטער רוים פון דעם ווינקל PRQ א טייל פון דעם אינוויינינגסטן רוים פון דעם ווינקל ACB, און אין דעם דריטן פאל, פארקערט, דעקט דער אינוויינינגסטער רוים פון ACB אוודאי א טייל פון דעם אינוויינינגסטן רוים פון PRQ. אבער דו דערמאנסט זיך דאך, וואס איך האב פריהער געהאט געזאגט, דהיינו, אז מיר טארן ניט פארגלייכן קיין אומענדליך ווייט אויסגעשפרייטע גרייסן, און דער אינוויינינגסטער רוים פון א ווינקל איז דאך א אומענדליך ווייט אויסגעשפרייטע גרייס. דער שטייגער, ווי מיר האבן ביז איצט טראַקטירט די ווינקלען, נוצט אונז ניט צו פארגלייכן אומגלייכע ווינקלען. מיר מוזן זוכן אן אנדער וועג דערצו.

ווען מיר וועלן מיט א שפילקע פיקסירן דעם פינטל R אין C און אריינלייגן די גראַדע RQ אויף CA, וועלן RQ און CA דערווייל ניט אייבשליסן קיין ווינקל; אבער ווען איך וועל דאס פאפיר קוים־קוים א דריי טאן אין דער ריכטונג פון דעם פייל (פיג׳ 37), אזוי אז דער פינטל Q וועט ליגן אינוויינינג אין דעם ווינקל ACB, וועלען שוין דעמאלט RQ און CA בילדן א ווינקל. דרייענדיג ווייטער, קענען מיר דערזעהען, אז RQ וועט ליגן אויף CD, און RP וועט אין דערזעלביגער צייט ליגן אויף CA. דעמאלט זאגן מיר: דער שטראל RQ האט זיך א דריי געטאן אויף דעם ווינקל PRQ אדער ACB. אבער אין אזא פאל דעקן זיך דאך ביידע ווינקלען, און זיי זיינען דעריבער גלייך. דאס איז שוין אן אנדער שטייגער צו באטראכטן



פיג׳ 37.

ווינקלען. ווען מיר וועלן נאך אביסל ווייטער דרייען, און RQ וועט איצט ליגן אויף CE, הייסט דאס, אז דער שטראל האט זיך אינגאנצן א דריי געטאָן אויף דעם ווינקל ACE. אין אָ ט ד ע ם זין, אין דעם זין פון דרייאונג, איז דער ווינקל ACD א טייל פון ווינקל ACE. ווארום מיר באטראכטן דאך איצט דעם ווינקל, אלס א רעזולטאט פון דרייאונג, אבער, איידער דער שטראל דערגרייט ביז CE, דארפן מיר אים דאך דרייען מ ע ר, ווי איידער ער איז דערגאנגען ביז CD; אדער, אנדערש גערעדט: איידער מיר האבן דערדרייט דעם שטראל אויף דעם ווינקל ACE, האבן מיר אים דאך געמוזט א פ ר י ה ע ר א דריי טאָן אויף דעם ווינקל ACD. אט אין ד ע ם זין זאגן מיר, אז דער ווינקל ACE איז גרעסער פון דעם ווינקל ACD, אבער ניט דערפאר, ווייל דער אינווייניגסטער רוים פון דעם ווינקל ACD איז כלומורשט א טייל פון דעם אינווייניגסטן רוים פון דעם ווינקל ACE. מיר קענען ערשט דאן ריידן וועגן «גרעסערע» אדער «קלענערע» ווינקלען, ווען מיר באטראכטן א ווינקל, אלס א מאָס פון דרייאונג, און ניט אלס א אומענדליך ווייטע אויסשפרייטונג.

ווען מיר באטראכטן די ווינקלען אזוי, גלייכווי זיי וואלטן געשאפן געווארן דורך דער דרייאונג פון שטראלן, קומען מיר ביי דער פארגלייכונג פון די ווינקלען ACB און PRQ צו אזעלכע אויספירן:

זאל RP ליגן אויף CA, און RQ אינווייניג אינם ווינקל ACB. דאס הייסט, אז RQ האט ביי דער דרייאונג נאך ניט דערגרייכט די לאגע CB. איז דאך PRQ קלענער ווי ACB.

זאל אבער RP ליגן אויף CA, און RQ דרויסן פון דעם ווינקל ACB. דאס הייסט, אז RQ האט ביי דער דרייאונג אריבערגעשריטן די לאגע פון CB, איז דאך PRQ גרעסער ווי ACB.

ווייטער: אמת טאקע, אז די באגריפן «גרעסער» און «קלענער» שטאמען, בנוגע די ווינקלען, ניט פון דעם פרינציפ פון באדעקונג אליין; פונדעסט־וועגן בלייבט אויך איצט דער כלל, אז דער ווינקל ACB איז גרעסער ווי דער ווינקל PRQ, ווען דער ווינקל PRQ איז קלענער ווי דער ווינקל ACB, און פארקערט. דער כלל מוז שטענדיג בלייבן א כלל, אלץ איינס אויף וועלכן וועג אדער מיט וועלכע מיטלען מיר פארגלייכן די גרייסן. ווארום אַניט וואלטן דאך די ווערטער «גרעסער» און «קלענער» סתם אנגעווארן זייער טייטש.

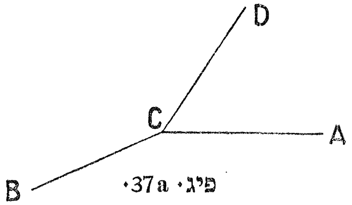
ווען דו וועסט פונקט אום צוועלף אזייגער א קוק טאָן אויף די ווייזערס פון דעם זייגער, וועסטו זעהען, אז זיי דעקן זיך. אבער, היות ווי דער גרויסער

ווייזער דרייט זיך גיכער ווי דער קליינער, וועלן ביידע אין א קורצער צייט ארום בילדן צווישן זיך א קליינעם ווינקל. די דרייאונג געשעהט אנטקעגן דער ריכטונג, וואס איז אנגעצייכנט אויף דער פיגור 37. דער ווינקל, וואס דער גרויסער ווייזער איז דורכגעגאנגען, איז ניט גלייך דעם ווינקל צווישן ביידע ווייזערס, ווייל דער קליינער ווייזער האט זיך דאך אין דער צייט אויכעט א דריי געטאן א ביסל. אין אמתן איז דער גרויסער ווייזער דורכ־געגאנגען דעם ווינקל, וואס ליגט צווישן אים און צווישן דער גראָדער, וואס פארבינדט דעם צענטער פון דעם ציפערבלאַט מיט דעם פינטל «צוועלף». די לעצטע גראָדע ליניע, וואס אויף איר איז דער גרויסער ווייזער גע־שטאנען אין אנהייב פון אונזער באַאָבאכטונג, רופן מיר די אינ־אנהייבדיגע לאגע פון דעם גרויסן ווייזער. גייט דער זייגער ווייטער, ווערט דער ווינקל צווישן דעם גרויסן ווייזער און זיין אינאנהייבדיגער לאגע אלץ גרעסער, ביז דער גרויסער ווייזער וועט אום האלב איינס אזייגער איבעראנייס ליגן אויף דער גראָדער ליניע פון זיין אינאנהייבדיגער לאגע (אבער אויפן צווייטן שטראל).

אין משך פון דער גאנצער צייט איז דער קליינער ווייזער געלעגן אינ־ווייניג אין יענעם ווינקל, וואס דער גרויסער ווייזער האט געבילדעט מיט זיין אינאנהייבדיגער לאגע. דאס הייסט, אז דער ווינקל צווישן דעם קליי־נעם ווייזער און דער אינאנהייבדיגער לאגע איז קלענער, ווי דער ווינקל צווישן דעם גרויסן ווייזער און דער אינאנהייבדיגער לאגע.

דער ווינקל, וואס דער גרויסער ווייזער בילדעט מיט זיין אינאנהייב־דיגער לאגע נאך האלב איינס א זייגער, איז א וואקסנדיגער ווינקל; דאס הייסט, אז וואס ווייטער דער ווייזער דרייט זיך, אלץ גרעסער ווערט דער ווינקל, ווארום דער ווינקל איז דאך א מאָס פון דער דרייאונג, און דער גרויסער ווייזער האט זיך ניט אויפגעהערט צו דרייען און ער האט זיך ניט אפגערוקט אויף צוריק, אדרבא, ער איז ווייטער כסדר געגאנגען זיין וועג אויף דעם ציפערבלאַט. דער ווינקל, וואס דער גרויסער ווייזער בילדעט איצט מיט דער אינאנהייבדיגער ליניע, הייסט א אויסגע־פוקלטער ווינקל. דער אינווייניגסטער רוים פון א אויסגעפוקלטן ווינקל איז דער גרעסערער פון די ביידע טיילן, אויף וועלכע די זייטן פון ווינקל צעטיילן דעם פליין פון דעם ציפערבלאַט. אויך איצט, הייסט עס, ליגט דער קליינער ווינקל אינווייניג אין דעם ווינקל צווישן דעם גרויסן ווייזער און דער אינאנהייבדיגער לאגע. די ווינקלען, וואס מיר האבן

געהאט באטראכט ביז איצט, זיינען ניט געווען קיין אויסגעפוקלטע ווינקלען; מיר וועלן זיך זעהר ווייניג פארנעמען מיט זיי. אבער דו מוזט האבן א השגה פון זיי, ווארום שפעטער וועסטו האבן צו טאן מיט זיי. ווען מיר צייכענען אדער קנייטשן צוויי שטראלן און באטראכטן דעם ווינקל, דעם איינגעשלאסענעם צווישן זיי, מיינען מיר שטענדיג דעם ניט אויסגעפוקלטן ווינקל, דעם איינגעפאלענעם ווינקל, וואס זיין אינווייניגסטער רוים באדעקט דעם קלענערן פון די ביידע טיילן, אויף וועלכע די זייטן פון דעם ווינקל צעטיילן דעם ציפערבלאַט. ווען דו וועסט אויף CD אויפצייכענען א ווינקל ACD און אויף דער אנטקעגנדיגער זייט פון CD א ווינקל BCD, מוזטו זיך ריכטן, אז עס קען געמאלט זיין, אז דער ווינקל, וואס די ביידע שטראלן CA און CB וועלן איינשליסן, און וואס אין אים ליגט CD, וועט ניט זיין קיין איינגעפאלענער. דו מוזט זיך רעכענען מיט דער מיגליכקייט, אז דער ווינקל ACB, וואס אנטהאלט יענע ביידע ווינקלען ACD און BCD, וועט זיין א אויסגעפוקלטער (פיג. 37a).



פיג. 37a.

איינניטונג.

דער זייגער איז 20 מינוטן פאר איינס. וועלכער ווינקל צווישן די ווייזערס איז א איינגעפאלענער? וועלכע פון די ציפערן 12, 3, 9 און 6 געפינען זיך אינווייניג אין דעם איינגעפאלענעם ווינקל?

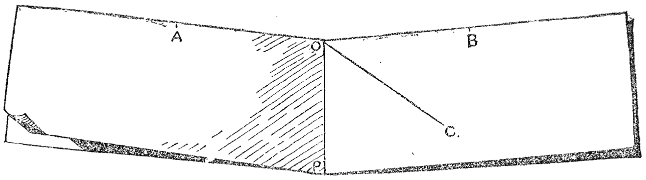
ווען דער זייגער איז האלב איינס, ליגט דער גרויסער ווייזער אויף איין גראָדער ליניע מיט דער אינאנהייבדיגער לאגע זיינער און בילדעט מיט איר ניט קיין איינגעפאלענעם און ניט קיין אויסגעפוקלטן ווינקל, נייערט א ווינקל, וועלכן מען רופט א גלאַטן ווינקל. על־פי־מדובר באַצייכנט מען אים מיט דעם גריכישן אות π, וואס הייסט «פי». אין אונזער בוך וועלן מיר ניט באנוצן קיין איינעם פון ביידע אויסדרוקן. איך וועל דיר שפעטער וויזן, אז א גלאַטער ווינקל קען צעטיילט ווערן אויף צוויי גלייכע איינגעפאלענע ווינקלען, וואס מען רופט זיי גראָדע ווינקלען,

און, ריידנדיג וועגן א גלאַטן ווינקל, וועלן מיר זאגן «צוויי גראָדע ווינקלען». דו קענסט זעהען אויף דעם ציפערבלאַט, אז דער ווינקל, וואס דער גרויסער ווייזער בילדעט אום א פערטל איינס מיט זיין אינאנ־הייבדיגער לאגע איז גלייך א העלפט פון יענעם (גלאַטן) ווינקל, ווארום דער ווייזער מאכט אין יעדער פערטל שעה א גלייכע דרייאונג. דער ווינקל, וועלכן דער ווייזער גייט דורך אין א פערטל שעה, איז א גראָדער ווינקל. א אויסגעפוקלטער ווינקל איז, ווי דו זעהסט, גרעסער ווי צוויי גראָדע ווינקלען.

פערפענדיקולאַרע ליניעס.

§ 13. אויסקנייטשן א פערפענדיקולאַר.

נעם דיין פאפירענע ווירע, צייכן אויף אויף איר א פינטל O, און קנייטש איין די ווירע אזוי, אז דער קנייטש זאל דורכגיין דורך O. זאל P זיין נאך א פינטל אויף דעם קנייטש, A און B זאלן זיין צוויי פינטלעך אויפן קאַנט פון דער ווירע, וואס באדעקן איינער דעם אנדערן נאך דער קנייטשונג. זאל Q זיין דער פינטל אויפן צווייטן בלעטל פון דיין ווירע, וואס דעקט זיך מיטן פינטל P (פיג. 38) (דיין ווירע איז דאך א איינגע־קנייטשט בלאט פאפיר און באשטייט פון צוויי בלעטלעך, צו איינער אויף יעדן זייט פון קאַנט).



פיג. 38.

איצט גלעט אויס דיין ווירע גאנץ פלאַך, אזוי אז דיין בלאט פאפיר זאל ליגן אזוי ווי פריהער, איידער דו האסט פון אים געמאכט א ווירע.

די גראָדע OP איז א פערפענדיקולאַר צו AB, אדער
די גראָדע OP איז א פערפענדיקולאַרע ליניע צו AB.

דעפיניציע. א פערפענדיקולאַר צו דער גראַדע AB אין דעם פינטל O הייסט א שטראַל, וואס בילדעט גלייכע ווינקלען מיט די שטראַלן OA און OB, פון וועלכע עס באשטייט די גראַדע AB.

דו ווייסט, אז דאָס איז ריכטיג בנוגע OP, ווייל נאך דער קנייטשונג פאַזע OP האָבן זיך דאך די ווינקלען POA און POB געווּעזט געדעקט. דערביי האָבן זיך OA און OB אויך גענוי געדעקט, און דאס קען גע־שעהען נאָר אין דעם פאַל, ווען מיר קנייטשן די ווירע פאַזע OP, און ניט פאַזע א אנדער ליניע, וואס גייט דורך דורך O. דערפון איז געדרונגען, אז דורך דעם פינטל O קען אויף דער זייט פון AB, וואו עס ליגט דער פינטל P, ניט דורכגיין קיין צווייטער פערפענדיקולאַר צו AB חוץ דעם פערפענדיקולאַר OP. מיר ווייסן אבער אויך דורך אונזער קנייטשונג, אז אלע פיר ווינקלען POA, POB, QOA און QOB האָבן זיך געווּעזט געדעקט, איידער מיר האָבן אויסגעגלעט די ווירע, דאס הייסט זיי זיינען געווען גלייך. דערפון איז געדרונגען, אז OQ איז אויכעט א פערפענדיקולאַר צו AB, און אויכעט דער איינציגער פערפענדיקולאַר צו AB אין O אויף דער צווייטער זייט פון AB. ווען דו ווּעסט זיך איינקוקן, ווּעסטו מיר זאגן, אז POQ איז איין גראַדע ליניע. דאס הייסט אבער, אז עס איז דאָ בלויז איין פערפענדיקולאַרע ליניע (PQ) צו דער גראַדער AB אין פינטל O. דאס איז טאקע ריכטיג, אבער אויף אונזער אויג אליין טארן מיר זיך ניט פאַרלאָזן. אפשר זעהט עס נאָר אזוי אויס, ווייל מיר האָבן שלעכט געקנייטשט?

דער אמתער גרונט איז דער פאלגנדיגער: ווען מיר קנייטשן אונזער פאפיר פאַזע PO, ווייסן מיר, אז B און A דעקן זיך, אלץ איינס, צי דאס פאפיר איז איצט איינגעקנייטשט פאַזע AB, אדער ניט. אויב דאָס פאפיר איז ניט איינגעקנייטשט פאַזע AB, וועט די פארלענגערונג פון דעם קנייטש PO בכל אופן ליגן אויף דער אנדערער זייט פון AB, דאס הייסט אויף דער זייט, וואו עס ליגט Q (מיר ווייסן נאָך ניט צי דער קנייטש גייט דורך Q). אבער פון דער אנדערער זייט ווייסן מיר, אז, בשעת דאס פאפיר איז געווען איינגעקנייטשט אין א ווירע, האָבן זיך A און B געדעקט אויך דאַן, ווען מען האט איינגעקנייטשט די ווירע פאַזע OQ, ווייל די קנייטשן OQ און OP זיינען דאָך דענסטמאָל געווען איין קנייטש. אבער ווען A און B לאָזן זיך באדעקן אי דורך דעם קנייטש OP אי דורך דעם קנייטש OQ, דעמאלט מוז OQ ליגן אויף דער פארלענגערונג פון OP,

ווארום דורך איין און דעמזעלביגן פינטל O קען זיין בלויז איין קנייטש, דורך וועלכן A און B לאזן זיך באדעקן.

ביידע שטראלן, וואס זיינען פערפענדיקולאַר צו AB אין O, ליגן אויף איין גראַדער, אדער ווי מען זאגט: זיי דערגאַנצן איינער דעם אנדערן צו א גראַדער ליניע.

מיט דערזעלביגער חקירה, מיט וועלכער מיר האבן אקארשט דערוויזן, אז די גראַדע POQ איז פערפענדיקולאַר צו דער גראַדער AOB אין O, קענסטו איצט דערווייזן, אז די גראַדע AOB איז פערפענדיקולאר צו דער גראַדער POQ אין O.

דערפון איז געדרונגען, אז עס איז פאַרהאַן א גראַדע ליניע, און בלויז איינע אזעלכע, וואס איז אין א געגעבענעם פינטל פערפענדיקולאַר צו א גראַדער ליניע, וואס גייט אַדורך דורך דעם פינטל. די לעצטע גראַדע איז אויך פערפענדיקולאַר צו דער ערשטער.

די אייגנשאפט פון צוויי גראַדע, וואס זיינען פערפענדיקולאר איינע צו דער אנדערער, איז דער אויסדרוק פון זייער לאגע איינע צו דער אנדערער, אדער פון זייער צואנאנדערדיגער לאַגע.

גראַדע ווינקלען. מיר האבן געזעהען, אז די ווינקלען AOP, BOP, QOA, QOB זיינען אלע גלייך. יעדער פון די ווינקלען הייסט א גראַדער ווינקל. א גראַדער ווינקל האלט פונקט 90° (90 גראַד).

ווען מיר וועלן אין וואס פאר גיט איז פינטל O_1 פון דערזעלביגער גראַדער AB אדער פון ליאַד אַ וועלכער גראַדער A_1B_1 דורכפירן דעם פערפענדיקולאר $P_1O_1Q_1$, קענען מיר אויף א אנדער שטיק פאפיר אויס־קנייטשן א גענויע קאָפּיע פון ביידע פון ליניעס AOB און $A_1O_1B_1$, אזוי אז ביידע פיגורן זאלן זיך דעקן. ווען מיר וועלן אויף דער קאָפּיע באנוצן דיזעלביגע אותיות, קענען מיר דאס ערשטע בלאט באדעקן מיט דער קאָפּיע אזוי, אז O_1 זאל זיך אוועקגלייגן אויף O, און די גראַדע $A_1O_1B_1$ אויף דער גראַדער AOB. ווען מיר וועלן איצט אקוראט איינקנייטשן ביידע בלעטער פאַראַמאַל פאזע AB און, פיקסירנדיג O, צונויפלייגן די רענדער, וועט זיך איין בלאט איינקנייטשן פאזע POQ, און דאס אנדערע פאזע $P_1O_1Q_1$, און די פיר גראַדע ווינקלען פון איין בלאט וועלן זיך דעקן מיט די פיר גראַדע ווינקלען פון דעם אנדער בלאט; דאס הייסט, זיי זיינען גלייך. אזוי ארום ווערט קלאַר, אז אלע גראַדע ווינקלען מוזן זיין

גלייך. דעריבער קענסטו מיט דער הילף פון דיין פאפירענעם מאָדעל פון א גראַדן ווינקל, אהן שום קנייטשן, אַראָפּלאָזן א פערפענדיקולאַר צו א גראָדער פון א פינטל, וואס ליגט דרויסן פון דער גראָדער, אדער אויפ־שטעלן א פערפענדיקולאַר צו א גראָדער אין א פינטל אויף דער גראָדער גופא. לייג צו דיין מאָדעל מיט איין קאנט זיינעם צו דער גראָדער און רוק אים אזוי לאנג אויף דער גראָדער, ביז דער צווייטער קאנט וועט דער־גרייכן דעם געגעבענעם פינטל, דערנאך פיר דעם בליישטיפט פאזע דעם צווייטן קאנט און פארלענגער די ליניע, וויפיל דו ווילסט.

איינניטונגען.

1. קנייטש אויס וואס אקוראטער פאלגנדיגע ווינקלען:
$5^1/_2°$; $11^1/_4°$; $22^1/_2°$; $45°$; $90°$.
שנייד דעם לעצטן ווינקל אויס, אבער אקוראט, לייג ארויף אויפן טיש א מטבע (א צווייקאפעדיגע קופערנע מטבע, אבער בעסער א זיבלערנע מטבע) און זוך אויף מיט דער הילף פון דיין מאָדעל דעם אָרט, וואו דו מוזסט שטיין, כדי דער ווינקל פון דיין מאָדעל זאל זיין דער געדוכטער דיאמעטער פון דער מטבע (אגב: $5^1/_2°$ איז כמעט א העלפט פון $11^1/_4°$).

2. האלט די מטבע אין דיין אויסגעשטרעקטער האנט און שאץ אָפּ, וויפיל גראַד עס האלט דער געדוכטער דיאמעטער פון דער מטבע (אן ערך $2°$).

3. שטעל אוועק א טעלער ווערטיקאַל און זוך אויף דעם אָרט, פון וועלכן דער געדוכטער דיאמעטער פון דעם טעלער וועט האלטן העכער 10 גראַד ($11^1/_4°$) אדער העכער $5°$ ($5^1/_2°$).

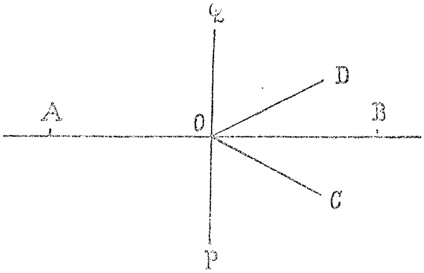
4. זוך אויף דעם אָרט (דעם שטייאָרט), פון וועלכן דער געדוכטער דיא־מעטער פון דעם ציפערבלאט וועט זיין $5°$.

5. שטעל זיך דרויסן ביי דער טיר און פרוב אפשאַצן דעם זעהווינקל, אונטער וועלכן עס באווייזט זיך די ווערטיקאַלע, וואס גייט אַדורך דורך די העכסטע פינטלעך פון בוימער, הייזער, טעלעגראפישע סלופעס (אטדער ווינקל הייסט די געדוכטע הייך פון די אָביעקטן).

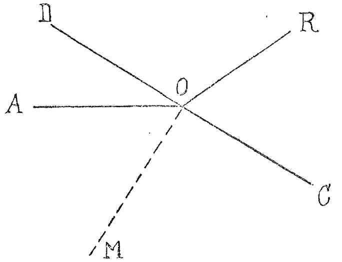
6. באטראכט צוויי טעלעגראפישע סלופעס און שאץ אָפּ וואס גענויער דעם זעהווינקל, אונטער וועלכן עס באווייזט זיך דער אָפּשטאַנד צווישן זיי (דעם ווינקל רופט מען «געדוכטער אָפּשטאַנד» צווישן די סלופעס).

7. שאץ אָפּ אזוי גענוי, ווי דו קענסט נאָר, דעם געדוכטן אָפּשטאַנד צווישן צוויי גלענצנדיגע שטערנס, וואס דו זעהסט.

דערגאַנצנדיגע ווינקלען. דורך דעם פינטל O גייען דורך צוויי גראָדע AB און PQ, פערפענדיקולאַרע צואנאנדער; ווען דו וועסט פירן א אנדער שטראַל OC דורך O, איז קלאָר, אז OC וועט ליגן אינווייניג אין א גראָדן ווינקל, וואס איז געבילדעט דורך AB און PQ. אויף דער פיגור 39 ליגט OC אינווייניג אין דעם גראָדן ווינקל POB. דעריבער איז (לויט § 12) דער ווינקל COA גרעסער ווי איין גראָדער ווינקל, און COB איז קלענער ווי איין גראָדער ווינקל. ביידע צוזאמען באטרעפן גענוי 2 גראָדע ווינקלען. א ווינקל, וואס איז גרעסער ווי א גראָדער, הייסט א ברייטער ווינקל; א ווינקל, וואס איז קלענער ווי א גראָדער, הייסט א שמאָלער ווינקל. צוויי ווינקלען, וואס מאכן אויס צוזאמען 2 גראָדע ווינקלען, הייסן דער־גאנצנדיגע ווינקלען. די ווינקלען, וואס א שטראַל בילדעט מיט א גראָדער, וואס שניידט אים, זיינען אדער ביידע גראָדע ווינקלען אדער איינער פון זיי איז א ברייטער און דער אנדערער א שמאָלער ווינקל, דעמאלט זיינען זיי דערגאנצנדיגע ווינקלען, ד. ה. צוזאמען מאכן זיי אויס צוויי גראָדע ווינקלען.



פיג. 39.



פיג. 40.

ביז איצט האסטו נאָר דורך קנייטשן אדער מיט דיין פאפירענער ווירע געקענט אויספרובן, צי ליגן דריי פינטלעך אויף איין גראָדער צי ניט. איצט האסטו א נייעם מיטל דערצו: פארבינד (פיג. 40) איינעם פון די פינטלעך O מיט יעדן פון די אנדערע C און D, פיר OM פערפענדיקולאַר צו OD. אויב OM איז פערפענדיקולאַר צו OC, דעמאלט — און נאָר דעמאלט — ליגן אלע דריי פינטלעך אויף איין גראָדער. אויפן זעלביגן וועג קענען מיר איצט דערגיין, צי ליגן צוויי שטראַלן, ארויסגייענדיגע פון איין פינטל, אויף איין גראָדער אדער ניט. ווען דו האסט א ווינקל AOC און דו

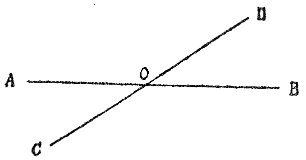
פירסט א שטראַל OR אויף דער זייט פון OC, וואס ליגט אנטקעגן A (פיג. 40), ליגט OR דאס רוב ניט אויף איין גראַדער מיט OA. אבער, ווען דו ווענסט OR פירן אזוי, אז דער ווינקל ROC זאל זיין א דער־גאנצנדיגער ווינקל פון דעם ווינקל OAC, דעמאלט ליגן די שטראַלן OC און OR אויף איין גראַדער ליניע.

ווען צוויי, אויף אנטקעגנדיגע זייטן פון דער גראַדער DOC ליגנדיגע שטראַלן OA און OR בילדען מיט דעם שטראַל DC דערגאנצנדיגע ווינקלען, איז די ליניע AOR א גראַדע; OA און OR בילדן דעמאַלט מיט יעדן דריטן, דורך O גייענדיגן שטראַל דערגאנצנדיגע ווינקלען.

שכנישע ווינקלען און אפגעקערטע ווינקלען. באטראכט איצט

צוויי גראַדע AOB און COD, וואס שניידן זיך אין O. ביי O ליגן 4 ווינקלען. לייען זיי (פיג. 41).

פון אטדי 4 ווינקלען רופט מען יעדע פאָר ווינקלען, וואס האבן א בשותפותדיגן שפיץ און איין בשות־פותדיגע זייט, שכנישע ווינקלען (ווייל זיי ליגן בשכנות); יעדע פאָר ווינקלען, וואס האבן נאָר א שפיץ א בשותפותדיגן, רופט מען אפגעקערטע ווינקלען (ווייל זיי זיינען אפגעקערט איינער פון דעם אנדערן מיט די רוקנס ><). וויפיל פאָר שכנישע ווינקלען און וויפיל פאָר אפגעקערטע ווינקלען זעהסטו אויף דער פיג. 41? לייען זיי!



פיג. 41.

די פאָרן שכנישע ווינקלען זיינען:

AOC און COB
COB און BOD
BOD און DOA
DOA און AOC

די פאָרן אפגעקערטע ווינקלען זיינען:

AOC און BOD
COB און DOA

מיר האבן געפונען 4 פאָר שכנישע ווינקלען און צוויי פאָר אפגעקערטע ווינקלען. ווען א ווינקל איז א שכנישער ווינקל פון א געגעבענעם ווינקל,

איז ער אויך א שכנישער ווינקל פון דעם אפגעקערטן ווינקל פון דעם געגעבענעם.

וואס קענסטו זאגן וועגן א פּאָר שכנישע ווינקלען? זיי זיינען דערגאַנצנדיגע ווינקלען, ד. ה. זיי דערגאַנצן איינער דעם אנדערן צו צוויי גראַדע ווינקלען.

וואס קענסטו זאגן וועגן א פּאָר אפגעקערטע ווינקלען? זיי זיינען גלייך איינער דעם אנדערן. ווארום יעדער פון זיי מאכט אויס מיט דעם בשותפותדיגן שכנישן ווינקל צוזאמען 2 גראַדע ווינקלען.

למשל: $AOC + BOC = DOB + BOC$.

איינגיטונגען.

1. ווייז, אז די ביסעקטאָרן פון צוויי אפגעקערטע ווינקלען ליגן אויף איין גראַדער.

2. ווייז, אז די ביסעקטאָרן פון צוויי שכנישע ווינקלען זיינען פערפענדיקולאַר איינער צום אנדערן.

3. ווייז, אז, ווען O איז דער צענטער פון א ראָד, וואס גייט דורך B און D, און M איז דער מיטן פון BD, איז OM פערפענדיקולאַר צו BD.

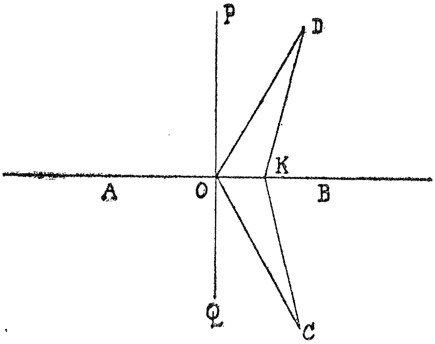
4. A און C זיינען צוויי פינטלעך פון א רינג; ווייז, אז דער צענטער פון דעם רינג ליגט אויף דעם פערפענדיקולאַר צו דעם מיטן פון AB.

5. אריינטראכטנדיג זיך אין דער איינגיטונג נומער 4, ווייז, וויאזוי מען קען געפינען דעם צענטער פון א ראָד, וואס גייט אַדורך דורך דריי פינטלעך A, B און C, וואס ליגן ניט אויף איין גראָדער. צייכן אויף דעם ראָד.

פינטלעך, וואס דעקן זיך ביי קנייטשונגען. דו האסט געזעהען: ווען OP איז פערפענדיקולאַר צום קאַנט פון דער ווירע (פיג. 40), און Q איז דער פינטל, וואס דעקט זיך מיט P, ווען די ווירע ווערט אויסגעקנייטשט פון א בלאט פאפיר, דעמאָלט ליגט די פארבינדנדיגע ליניע PQ אויף דעם פערפענדיקולאַר OQ, און PQ איז אין דעם געקנייטשטן קאַנט פון דער ווירע געטיילט אויף העלפט.

אויב ביים אויסקנייטשן די ווירע פאַלן צונויף צוויי אנדערע פינטלעך פון ביידע בלעטלעך פון דער ווירע, למשל C און D, (פיג. 42) איז אויף זיי חל דאס אייגענע, וואס אויף P און Q.

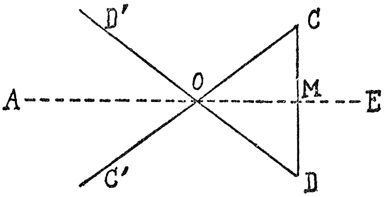
ווען מיר קנייטשן איין א בלאט אזוי, אז צוויי פינטלעך C און D דעקן זיך, דעמאָלט קנייטשט זיך CD ארויף אויף זיך גופא, און ווערט אין M געטיילט אויף העלפט דורך דעם קנייטש, און בילדעט מיט אים גראָדע ווינקלען. דער קנייטש איז דער פערפענדיקולאַר צום מיטן פון CD, אדער ער איז, ווי מען דריקט זיך אויס, דער מיטלסטער פערפענדיקולאַר צו CD.



פיג. 42.

ווען די פינטלעך C און D פאַלן צונויף, דעמאָלט דעקן זיך פאראיינס די שטראלן OC און OD, און די ווינקלען, וואס זיי בילדן מיט דעם קנייטש, זיינען גלייכע, אבער ניט קיין גראָדע ווינקלען, ווייל DOC איז ניט קיין גראָדע ליניע.

פארלענגער איצט DO ביז D_1 און CO ביז C_1 (פיג. 43). זאג אקארשט, מיט וועלכער גראָדער וועט זיך OD_1 דעקן, ווען מיר וועלן איינקנייטשן דאס בלאט ווי פריהער? מיט OC_1. פאר־וואס? ווייל דער קנייטש AB צע־טיילט אויף העלפט ניט בלויז דעם ווינקל COD, נייערט אויך זיין שכנישן ווינקל C_1OD_1. דערפון איז גע־דרונגען:



פיג. 43.

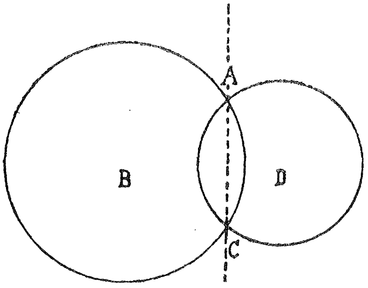
ווען ביים קנייטשן דעקן זיך די פינטלעך C און D, און דער קנייטש גייט אַדורך דורך א פינטל O, דעמאָלט דעקן זיך אויך די שטראלן OC און OD און דאסגלייכן זייערע פארלענגערונגען איבער O אריבער.

איינניטונג.

אויף אונזער פאפיר ליגן די פינטלעך C און D אזוי, אז, איינקנייטשנ־דיג דאס בלאט פאפיר, באדעקן מיר AD מיט AC. ווייז, אז דער קנייטש גייט אַדורך דורך M. דו קענסט אויף דעם סמך ווייזן, אז דער געאָמעט־

רישער אָרט פון אלע פינטלעך, וואס יעדער פון זיי שטייט אָפּ גלייך פון צוויי געגעבענע פינטלעך, איז דער מיטלסטער פערפענדיקולאַר צו דעם אפשניט צווישן די צוויי געגעבענע פינטלעך.

קאָנסטרוקציע פון א פערפענדיקולאר אהן דער הילף פון א מאָדעל פון א רעכטן ווינקל. ווען דורך א פינטל A גייען אַדורך צוויי רעדער, וואס זייערע צענטערס B און D ליגן ניט אויף איין גראָדער מיט A, מוזן ביידע רעדער האבן נאָך א בשותפותדיגן פינטל, און דעמאָלט איז BD דער מיטלסטער פערפענדיקולאר צו AC. קנייטש איין דעם בלאַט פאזע דער גראָדער BD צווישן די צענטערס, דעמאָלט וועט זיך יעדער ראָד ארויפערקנייטשן אויף זיך גופא, ווי דו ווייסט שוין, דעריבער מוז דער פינטל C, וואס ווערט דערביי באדעקט מיט A, געהערן צו ביידע רעדער, און דער קנייטש (זעה זייט 89 קורסיוו) איז דער מיטלסטער פערפענדיקולאר צו AC.



פיג׳ 44·

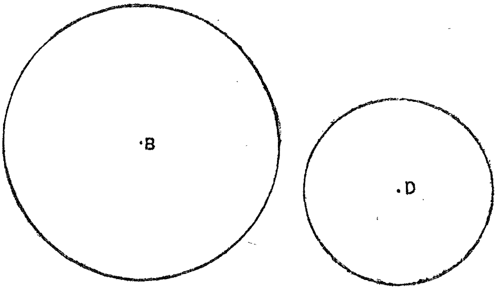
דאס גיט אונז די מיגליכקייט אראפּ־צולאזן א פערפענדיקולאר צו דער גראָדער BD פון א פינטל A, וואס ליגט דרויסן פון איר, ניט באנוצנדיג דעק מאָדעל פון א גראָדן ווינקל. מיר דארפן נאָר באשרייבן פון די פינטלעך B און D, אלס צענטערס, צוויי רעדער, וואס גייען דורך A און פארבינדן A מיט דעם צווייטן שניטפינטל C פון די רעדער.

שניידונג פון צוויי רעדער. עס איז לייכט צו צייכענען צוויי רעדער, וואס שניידן זיך ניט. דו וועסט זעהען, אז דאס געשעהט שטענדיג, ווען די סומע פון די צוויי ראדיוסן איז קלענער, ווי דער אָפּ־שטאַנד BD צווישן די צענטערס.

וואס הייסט א סומע פון צוויי אָפּשניטן?

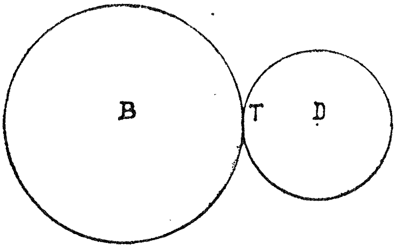
AB און CD זיינען צוויי אָפּשניטן. פיר מיט דיין ווירע א גראָדע MN. לייג אָפּ אויף דער גראָדער א אָפּשניט MP גלייך AB און א אָפּשניט PQ גלייך CD. דער אָפּשניט MQ הייסט די סומע פון די אָפּשניטן AB און CD.

ווען צוויי רעדער שניידן זיך ניט, קען איינער פון זיי ליגן אינווייניג אין דעם אנדערן (פיג· 29) אדער דרויסן פון דעם אנדערן (פיג· 45a)· ווען די סומע פון די ראַדיוסן איז גלייך דעם אָפּשטאַנד צווישן די צענטערס, דעמאָלט האבן



פיג· 45a·

ביידע רעדער איין איינציגן בשותפותדיגן פּינטל T, וואס ליגט אויף דעם פאַרבינדנדיגן אָפּשניט צווישן די צענטערס (פיג· 45b); מען זאָגט דעמאָלט: די רעדער אדער די רינגען באַרירן זיך פון דרויסן; די ווערטער «פון דרויסן» זיינען מיר מוסיף דערפאַר, ווייל יעדער ראָד ליגט דרויסן פון דעם אנדערן· אבער צוויי רעדער קענען זיך באַרירן אויך אויף א אנדער אופן, דהיינו אזוי, אז איין ראָד ליגט אינווייניג אין דעם אנ־דערן (פיג· 45c); מיר זאגן דע־מאָלט: זיי באַרירן זיך פון אינווייניג·



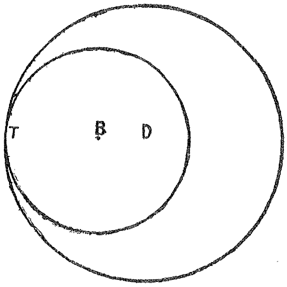
פיג· 45b·

ווען די סומע פון די ראַדיוסן איז גרעסער ווי דער אָפּשטאַנד צווישן די צענטערס, דעמאָלט שניידן זיך די רעדער אין צוויי פּינטלעך (פיג· 44) אדער איינער שליסט איין דעם אנדערן (פיג· 45c)· פאַרוואס דאס איז אזוי, וועסטו פאַרשטיין ערשט שפּעטער, ווען דו וועסט האבן געלערנט געוויסע ידיעות וועגן דרייעקן·

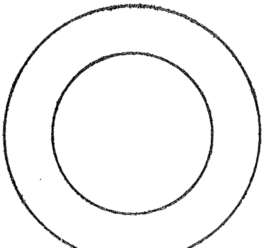
ווען די ראַדיוסן פון ביידע רעדער, וואס גייען דורך A[1], זיינען גלייך (פיג· 44), און מיר קנייטשן איין דאס בלאַט אזוי, אז B און D זאלן זיך

[1] אנשטאט· צו זאגן «דורכגיין דורך א פּינטל» זאגן מיר «גיין דורך א פּינטל»· בפרט באנוצן מיר דעם צווייטן אויסדרוק, ווען צוויי «דורך» דארפן שטיין איינער נאָך דעם אנדערן·

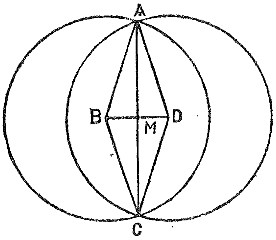
דעקן, מוז דער קנייטש דורכגיין הן דורך A (ז. איינגיטונג אויף זייט 66 והן דורך C (זעה קאפיטל: קאנסטרוקציע פון א פערפענדיקולאר אהן א מאָדעל). מיר ווייסן אויך, אז דער קנייטש מוז טיילן BD אויף העלפט



פיג. 45c.


פיג. 45d.

אונטער א גראָדן ווינקל. ווען M איז דער מיטן פון BD, ליגן A, M און C אויף איין גראָדער, דהיינו אויף דעם פערפענדיקולאר צו BD אין M (ז. איינגיטונג אויף זייט 46). אויף דעם שטייגער קענסטו, אהן א מאָדעל פון א גראָדן ווינקל, אויפשטעלן א פערפענדיקולאר צו א געגעבענער גראָדער אין איינעם א פינטל אירן M. דו דארפסט נאָר אפלייגן אויף דער גראָדער צוויי גלייכע אָפשניטן MA און MB אויף ביידע זייטן פון M און באשרייבן צוויי קאָנגרועגטע רעדער פון די צענטערס B און D. דו מוזט אבער אויסמארקירן, אז די רעדער זאלן זיך שניידן, און דאס געשעהט בלויז דאַן, ווען דער ראדיוס איז גרעסער ווי MB אדער MD. כדי צו צייכענען גענוי, איז בעסער צו נעמען



פיג. 46.

וואס א גרעסערן ראדיוס, כדי די שניטפינטלעך A און C פון די רעדער זאלן ליגן ווייט פונאנאנדער און זיי זאלן אונז קענען דינען, אלס בעסערע צילן, צום דורכפירן די פארבינדנדיגע ליניע AC. AC איז דער פאר־לאנגטער פערפענדיקולאר אין M.

די פיג. 46 וועט אונז זיין זעהר ניצליך. זי לערנט אונז אויספירן דריי אנדערע קאָנסטרוקציעס ריין געאמעטריש, אהן א מאָדעל, אהן קנייטשן,

אהן מעסטונגען מיט דער פּאַפּירענער ווירע. זי לערנט אונז ערשטנס: צו צעטיילן א געגעבענעם אָפּשניט BD אויף העלפט; צווייטנס: צעטיילן א געגעבענעם ווינקל BAD אויף העלפט; דריטנס: אראָפּלאָזן א פּערפּענדיקולאר צו א געגעבענער גראַדער BD פון א דרויסנדיגן פּינטל A, אדער אויפשטעלן א פּערפּענדיקולאר צו א גראַדער אין איינעם א פּינטל אירן M.

דו קענסט אויספירן די קאָנסטרוקציעס אליין, אהן מיינע עצות.

דער ראָמבּ.

§ 14. דעפיניציע פון א ראָמבּ.

די פיגור ABCD (פיג. 46) הייסט ראָמבּ. א ראָמבּ איז א פּירזייטיגע גראַדליניגע פליינעגע פיגור, וואס די זייטן אירע זיינען גלייך.

די אָפּשניטן AC און BD, וואס פארבינדן אנטקעגנדיגע עקן פון דעם ראָמבּ, הייסן דיאַגאָנאַלן (דיאַ הייסט אויף גריכיש דורך; מיר האבן שוין געהאט דאס ווארט אין דעם טערמין דיאַמעטר; גאָני הייסט אויף גריכיש ווינקל). דו האסט שוין געהערט דאס ווארט דיאַגאָנאַל, בשעת מיר האבן גערעדט וועגן דעם גראָדווינקלדיגן פּאַראַלעלעפּיפּעד.

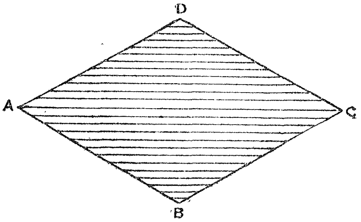
דו האסט געזעהען, בשעת מיר האבן פריהער דורכגענומען די פיגור 46, אז, ווען מיר האבן איינגעקנייטשט דעם ראָמבּ פאזע דעם דיאַגאָנאַל BD, האבן זיך A און C געדעקט, די אָפּשניטן AB און CB האבן זיך געדעקט, דאסגלייכן AD און CD, און דער ראָמבּ איז געוועזן איינגעקנייטשט איבער זיך גופא. ווייטער האסטו געזעהען: ביים איינקנייטשן פאזע דעם אנדער דיאַגאָנאַל AC, האט זיך B באדעקט מיט D, און דער ראָמבּ איז ווידער געוועזן איינגעקנייטשט איבער זיך גופא. דאס פירט צו דער פאלגנדיגער טעארעמע.

די דיאַגאָנאַלן פון א ראָמבּ שניידן זיך אויף העלפט אונטער א גראַדן ווינקל און יעדער פון זיי טיילט אויף העלפט די ווינקלען, דורך וועלכע ער גייט. די אנטקעגנליגנדיקע ווינקלען פון ראָמבּ זיינען גלייך.

אין דעם פריהערדיגן קאַפּיטל האב איך דיר געוויזן דריי קאָנסטרוקציעס, וואס דו קענסט זיי, ווי איך האב געזאגט, אויספירן אליין, אהן מיינע עצות. אויב דו האסט זיי אלע אויסגעפירט, וועסטו אויך די אקארשט גע־בראַכטע טעארעמע אליין קענען בפרוטרוט באווייזן.

סימעטריע פון א ראָמב. דו זעהסט, אז א ראָמב איז סימעטריש בנוגע יעדן פון זיינע דיאַגאָנאַלן. ווען דו וועסט איינקנייטשן דאָס בלאַט פאזע א אנדער ליניע, וועסטו זעהען, אז דער ראָמב וועט זיך ניט איינקנייטשן איבער זיך גופא. בכן, האט דער ראָמב בלויז צוויי סימעטריאלע אַקסן, און מער ניט; דאס זיינען זיינע דיאַגאָנאַלן.

דער שטח פון א ראָמב. א ראָמב שליסט איין א טייל פון דעם פליין, פונקט ווי א ראָד; ער פארנעמט א שטח; ער צעטיילט דעם פליין אין צוויי טיילן, וואס איינער פון זיי פארענדערט זיך ניט אין זיין גרייס, ווי גרויס דאס בלאַט, אויף וועלכן ער ליגט, זאל ניט זיין; דער אנדערער טייל קען זיך פארגרעסערן, אדער פארקלענערן, ווענדט זיך, ווי גרויס דאס שטיק פליין (דאס בלאַט) איז, וואס מיר האבן פאר זיך; אין די געדאנקען קענען מיר דעם שטח פונם בלאַט פארגרעסערן אדער פארקלענערן; דער שטח פון ראָמב ענדערט זיך דורך דעם ניט. אויף דער פיגור 47 איז דער שטח פון דעם ראָמב געשטריכלט; ער איז איינגעשלאסן אין דעם ראָמב, דער ראָמב איז זיין באגרעניצונג. יעדער פינטל, וואס ליגט ניט אויף דער ליניע פון דעם ראָמב, אבער ער ליגט אויף דעם שטח פון דעם ראָמב, ליגט אינווייניג אין ראָמב; יעדער פינטל, וואס ליגט ניט אינווייניג אין ראָמב, ניט אויף דער באגרעניצונג, ליגט, ווי מען זאגט, דרויסן פונם ראָמב.



פיג. 47.

אונטער ראָמב האבן מיר פארשטאנען די ליניע, וואס באשטייט פון 4 אָפשניטן. בקצור פארשטייט מען אבער אונטער ראָמב דעם גאנצן טייל פונם פליין, וואס איז איינגעשלאסן אין דער ליניע, און די ליניע גופא, די באגרעניצונג פון דעם ראָמב, רופט מען די ראַם פון דעם ראָמב.

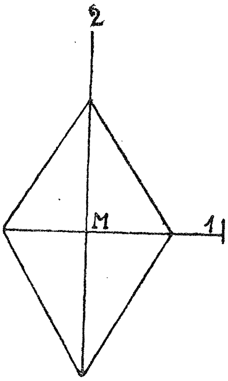
קאָנסטרוקציע פון א ראָמב. די פיג. 46 ווייזט אונז, וויאזוי מען צייכנט א ראָמב, ווען עס איז געגעבן די לענג פון זיינע זייטן און פון איינער פון זיינע דיאַגאָנאַלן. די פיגור לערנט אונז אויך קאָנסטרואירן א ראָמב, ווען עס איז באוואוסט די לענג פון זיינע דיאַגאָנאַלן, ווייל די

דיאַגאָנאַלן פון א ראָמב שניידן זיך אונטער א גראָדן ווינקל אויף העלפט·

די קאָנסטרוקציעס קען מען זעהר גוט אויספירן דורך קנייטשן·

ווי קנייטשט מען אויס א ראָמב, ווען זיינע דיאַגאָנאַלן זיינען געגעבן?

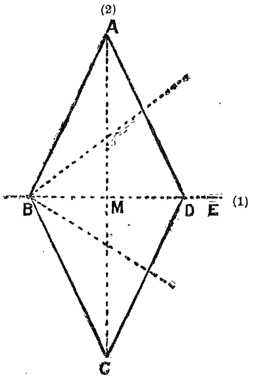
קנייטש אויס צוויי גראָדע ליניעס (1) און (2), וואס שניידן זיך אין M אונטער א גראָדן ווינקל (פיג· 48)· לייג אפ אויף דער ליניע (1) צוויי אָפשניטן אויף יעדער זייט פון M, אזוי אז יעדער אָפשניט זאל זיין גלייך דער העלפט פון איין דיאַגאָנאַל· אויף דער ליניע (2) נעם אויך צוויי אָפשניטן, צו איינעם אויף יעדער זייט פון M, אזוי אז יעדער זאל זיין גלייך א העלפט פון דעם צווייטן דיאַגאָנאַל· איצט מאַך קנייטשן דורך יעדע צוויי פרייע עקן פון די אָפשניטן און דו האסט אויסגעקנייטשט דעם פארלאנגטן ראָמב·



פיג· 48·

ווי קנייטשט מען אויס א ראָמב, ווען עס איז געגעבן די לענג פון זיינע זייטן און פון איינער פון זיינע דיאַגאָנאַלן?

קנייטש אויס א גראָדע (1) און נעם אויף איר דעם אָפשניט BD, גלייך דעם געגעבענעם דיאַגאָנאַל (פיג· 49), און א אָפשניט BE, גלייך דער געגעבענער זייט· צעטייל BD אויף העלפט, באדעקנדיג D מיט B· באצייכן דעם נייעם קנייטש, אלס ליניע (2)· קנייטש איין דאס פאפיר פאזע BD און, פיקסירנדיג B, בייג אריבער דעם קנייטש אזוי ווייט ארויפצו, ביז דער פינטל E וועט פאלן אויף דער ליניע (2)· דעם פינטל, וואס דעקט זיך מיט E, רוף אָן A און קנייטש איין דאס פאפיר דורך די פינטלעך A און B; אזויווי דאס בלאַט איז צונויפגעלייגט, באקומט מען פאַראַמאָל BA פון איין זייט און BC פון דער אנדערער זייט; פונקט אזוי קנייטש אויס DA און DC, און דו וועסט באקומען דעם ראָמב ABCD·

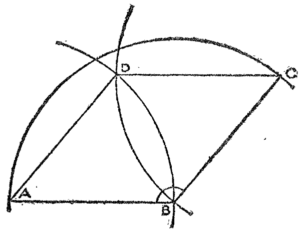


פיג· 49·

ווי צייכנט מען א ראָמב, וואס זיין זייט איז

גלייך א געגעבענעם אָפשניט, און זיין ווינקל איז גלייך א געגעבענעם ווינקל?

מעטאָד 1. דאס קען מען מאכן ערשטנס מיט א מאָדעל פון דעם געגעבענעם ווינקל, אָפּמעסטנדיג אויף אים די ריכטיגע לענג פון דער זייט פון דעם ראָמב. דער מעטאָד איז בכלל ניט זעהר גענוי.



פיג. 50.

מעטאָד 2. פיר AB, גלייך דעם געגעבענעם אָפשניט (פיג. 50). באשרייב א ראָד ארום B מיט דעם ראדיוס BA. צייכן א ווינקל ABC, גלייך דעם געגעבענעם ווינקל; דעם ווינקלס זייט BC שניידט דעם ראָד אין C. צייכן 2 רעדער מיט די צענטרס A און C און מיט דעם ראדיוס פון דעם ערשטן ראָד.ביידע מוזן גיין דורך B, און, אזוי ווי A, B און C ליגן ניט אויף איין גראָדער, וועלן זיך די לעצטע צווי רעדער נאך איין מאָל שניידן אין D. ABCD איז דער פארלאנגטער ראָמב.

איינגיטונגען.

1. א) קנייטש אויס א ראָמב, ווען עס איז געגעבן איינער פון זיינע דיאַגאָנאַלן QC און די ריכטונג פון איין זייט זיינער AQB (פיג. 99). (דער מיטלסטער פערפענדיקולאר צו QC איז דער צווייטער דיאַגאָל, וואס ווערט געטיילט אויף העלפט דורך CQ).

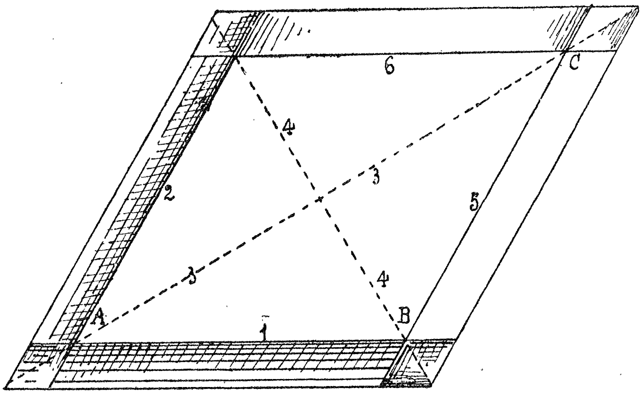
ב) צייכן דעמזעלביגן ראָמב.

2. א) קנייטש אויס א ראָמב, ווען עס איז געגעבן איינע פון זיינע זייטן QC און די ריכטונג פון דער שכנישער זייט QB (פיג. 100. איינער פון די דיאַגאָנאַלן איז דער ביסעקטאר פון דעם ווינקל CQC, דער אנדערער איז דער פערפענדיקולאר פון C צו דעם ערשטן דיאַגאָנאַל.)

ב) צייכן דעמזעלביגן ראָמב.

אויסקנייטשן א ראָמב (פיג. 51). קנייטש אויס א גראָדע (1). קנייטש אויס (2) אונטער א געגעבענעם ווינקל צו (1). שנייד אָפּ די רענדער ניט ווייט פון (1) און (2). קנייטש אויס (3), באדעקנדיג (1) מיט (2). גלעט אויס דעם קנייטש (3), נעם אויף (1) א פינטל B אויף א געגעבענעם

אָפשטאַנד פון דעם שפּיץ פון דעם קאָנסטרואירטן ווינקל· קנייטש אויס (4) פּערפּענדיקולאַר צו (3) דורך B· דערצו דאַרפסטו פיקסירן B און ארויפ־קנייטשן (3) אויף זיך גופא· ניט אויסגלעטנדיג דאס בלאַט, לאזנדיג ליגן דעם ארויפגעקנייטשטן עק, קנייטש איין דאס איבעריגע פּאפּיר אזוי: פון איין זייט פּאזע דעם ארויפגעלייגטן קאַנט (1), וועסטו באקומען (5); פון דער אנדערער זייט פּאזע דעם ארויפגעלייגטן קאַנט (2), וועסטו באַקומען (6)· כדי די דיק פונדעם פּאפּיר זאל ניט איבערפירן די גענויקייט פון



פיג· 51·

דער קאָנסטרוקציע, וועסטו (5) און (6) אויסקנייטשן אראָפּצו, ניט ארויפצו· (איידער דו מאכסט די קנייטשן (5) און (6), מוזטו זעהען, אז די קאַנטן (2) און (1) זאלן זיין איינגעקנייטשט ווי געהעריג[1])·

די ווינקלען פון א ראָמב· דו זעהסט, אז עס איז ניט נויטיג צו וויסןביידע ווינקלען פון דעם ראָמב· ווען דו ווייסט איין ווינקל און די לענג פון דער זייט, איז דער ראָמב פולקום באשטימט, בכן זיינען אויך די אנדערע ווינקלען פון דעם ראָמב באשטימט· איינער פון זיי, דער

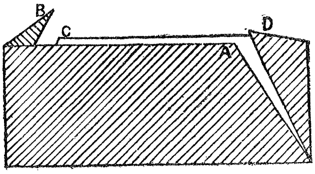
[1]) ביי אלע קאָנסטרוקציעס דורך קנייטשן איז אלעמאל לייכטער צו מאכן א קנייטש דורך איין פּינטל אין א געגעבענער ריכטונג, איידער דורך צוויי פּינטלעך· ווייטער דאַרף א ליניע קיינמאל ניט געקנייטשט ווערן דורך 2 צונויפגעלייגטע בלעטלעך, אַניט וועט די קאָנסטרוקציע, מחמת דער דיק פונם פּאפּיר, זיין ניט גענוי· אין אזעלכע פאלן, ווי ביי אונזער לעצטער קאָנסטרוקציע, דאַרף מען דאס פּאפּיר אריבערבייגן אַראָפּצו און דערנאך מאכן דעם קנייטש פּאזע דער נויטיגער ליניע· מען וואלט אונזער קאָנסטרוקציע געקענט מאכן אויף א אנדער שטייגער, אבער די פיגור וואלט ניט געווען גענוי·

אנטקעגנדיגער ווינקל, איז, ווי דו ווייסט, גלייך דעם געגעבענעם ווינקל. ביידע אנדערע זיינען אויך גלייך איינער דעם אנדערן; אבער ווי דערגייען מיר, ווי גרויס זיי זיינען? דו וועסט זעהען, אז זיי זיינען דערגאנצנדיגע ווינקלען פון דעם געגעבענעם ווינקל, אדער, ווי מען זאגט אויך, דערגאַנ־צונגען פון דעם געגעבענעם ווינקל, ד. ה. כידוע, אז, יעדער פון זיי דער־גאנצט דעם געגעבענעם ווינקל ביז 2 גראַדע ווינקלען.

דו קענסט דאס דערווייל נאָך ניט באווייזן.

דו קענסט אבער, קנייטשנדיג, געפינען, אז דאס איז ריכטיג:

צעטייל אויף העלפט די זייט AD פון דעם ראָמב אין דעם פינטל L (פיג. 52). פיקסירנדיג L, קען מען אזוי איינקנייטשן דעם ראָמב, אז AB זאל זיך אוועקלייגן פאזע DC; דעמאָלט ליגט A אויף א פינטל פון DC. טו א בייג דעם עק D אזוי, אז AL און DL זאלן ליגן הארט איינער לעבן אנדערן. דו וועסט דערזעהען, אז AB און DC ליגן איצט אויף איין גראַדער און די ווינק־לען LAB און LDC זיינען איצט שכנישע, און בכן דערגאנצנדיגע ווינקלען.



פיג. 52.

דער פינטל C ליגט איצט אונטער א באשטימטן פינטל פון AB. דו קענסט איצט אריבערבייגן דעם עק B אזוי, אז ער זאל זיך לייגן הארט לעבן C, דעמאָלט וועסטו זעהען, אז די ווינקלען ABC און DCB זיינען איצט שכנישע, דאס הייסט דערגאנצנדיגע.

דורך די אלע קנייטשן איז פון דעם ראָמב געוואָרן א פירזייטיגע פיגור מיט א גראָדן ווינקל אין יעדן עָק. אזא פיגור רופט מען גראָדעק.

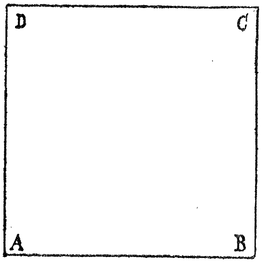
דו וועסט שפעטער האבן אַסך צו טאָן מיט גראָדעקן. די ווענטלעך פון א גראָדווינקלדיגן פאראלעלעפּיפּעד זיינען גראָדעקן. די זייטן פון אונזער גראָדעק זיינען ניט גלייך. א טאוועל פון א בוך גיט דיר די פארשטעלונג פון א גראָדעק. א קאָרט, א פּאָסטקאַרטל גיט דיר נאָך א בעסערע פאר־שטעלונג פון א גראָדעק.

א גראָדעק, וואס אלע זייטן זיינע זיינען גלייך, איז א ספּעציעלער מין ראָמב, דאס איז א ראָמב מיט גראָדע ווינקלען. דער נאמען פון אזא פיגור איז דיר שוין מסתמא גוט באוואוסט, דאס איז א קוואַדראַט. א שאָכברעט זעהט אויס ווי א קוואַדראַט, יעדע קעסטל פון א שאכברעט איז א קוואַדראַט.

דער קוואַדראַט.

§ 15. דעפיניציע פון א קוואַדראַט.

א קוואַדראַט איז א ספּעציעלער פאַל פון א ראָמב. ווען איינער פון די ווינקלען פון א ראָמב איז א גראָדער, איז דער ראָמב א קוואַדראַט (פיג. 53). דו פארשטייסט, אז יעדער ווינקל פון א קוואַדראַט איז א גראָדער, ווארום א גראָדער ווינקל איז דאָך א דערגאנצונג פון א צווייטן גראָדן ווינקל. אבער אין דער דעפיניציע פון א קוואַדראַט איז ניט נויטיג צו זאגן, אז אלע 4 ווינקלען זיינען גראָדע. עס איז גענוג, ווען דו זאגסט, אז איין ווינקל איז א גראָדער. דאס איבעריגע איז שוין א פועל־יוצא דערפון. זאָלסט האבן א כלל איין מאל פאַר אלע מאל: אין א דעפיניציע טאָרן קיינ־מאל ניט שטיין קיין איבעריגע סימנים פון דעם דעפינירטן באַגריף, מערניט די סימנים, וואס זיינען נויטיג און גענוג. אָטדער פּרינציפּ פון «נויטיגקייט און גענוגענקייט» איז חל ניט בלויז אויף געאמעטרישע דעפיניציעס, נייערט אויף דעפיניציעס בכלל. א דעפיניציע, וואס באַפרידיגט ניט אָטדעם פּרינציפּ, איז שלעכט, אדער לכל־הפחות ניט שטרענג.



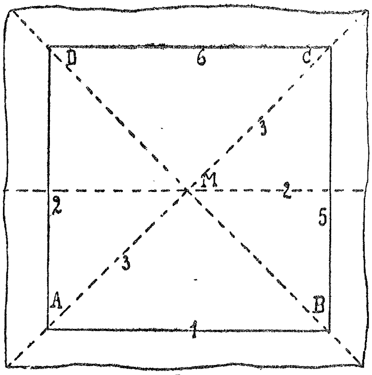
פיג. 53.

אזויווי מען קען לייכט קאָנסטרואירן א זעהר גענויעם מאָדעל פון א גראָדן ווינקל, איז עס אויך לייכט צו צייכענען א קוואַדראַט מיט דעם מעטאָד 1, וואס מיר האבן געגעבן פאַר א ראָמב.

אויסקנייטשן א קוואַדראַט. דאס קען מען לייכט מאכן, ווייל עס איז זעהר לייכט אויסצוקנייטשן א ליניע פּערפּענדיקולאר צו א צווייטער ליניע דורך א פּינטל אויף דער צווייטער אדער דרויסן פון דער צווייטער ליניע. אויסגעקנייטשט (1), (2) און (3) ווי ביים ראָמב אויף דער פיג. 51, איז שוין ניט נויטיג אויסצוקנייטשן דעם צווייטן דיאַגאָנאַל (4). מען קען תיכף אויסקנייטשן (5), אלס א פּערפּענדיקולאר צו (1) אין דעם פּינטל B, וואס וועט שניידן (3) אין C. קנייטש אויס א פּערפּענדיקולאר צו (5) אין דעם פּינטל C, באַקומסטו (6).

אגב, קען מען זיך באַגיין אהן דעם דיאַגאָנאַל (3) אויך· מען דאַרף נאָר אריבערבייגן ־ ניט קנייטשן ־ (1) איבער (2), און דאָרטן, וואו דער פינטל B פאַלט אויף (2), ליגט דער פינטל D· קנייטש אויס א פּערפּענדיקולאַר צו (2) אין D, וואָס שניידט זיך אין C מיט דעם פּערפּענדיקולאַר צו (1) אין B· אָדער אנשטאַט אריבערצובייגן, קענסטו אָפּמעסטן AD מיט דער ווירע (AD = AB), אויסקנייטשן (5) און אָפּמעסטן BC מיט דער ווירע (BC = AB) און פאַרבינדן D מיט C·

די דיאַגאָנאַלן פון א קוואַדראַט זיינען גלייך· דו קענסט דאָס באַווייזן מיט דיין פּאַפּירענער ווירע· אָדער, ווייסנדיג, אז יעדער ווינקל פון א קוואַדראַט איז א גראָדער, קענסטו עס באַווייזן דורך קנייטשן אויף אזא שטייגער:



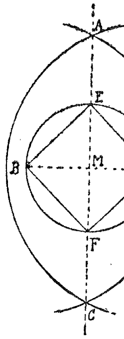
פיג· 54·

קנייטש איין דעם קוואַדראַט (פיג· 54) אזוי, אז A און D זאָלן זיך דעקן· אַזוי ווי די ווינקלען ביי A און D זיינען גראָדע, וועט זיך AB אוועקלייגן אויף DC, און, אַזוי ווי AB = DC, וועט זיך B דעקן מיט C· דער קנייטש צעטיילט AD און BC אויף העלפט, און די העלפטן זייערע וועלן זיך אויך דעקן; דעריבער מוז זיך אויך דער טייל פון דעם דיאַגאָנאַל AC, וואָס ליגט ביי A, דעקן מיטן טייל פון דעם דיאַגאָנאַל BD, וואָס ליגט ביי D, ווייל זיי זיינען דאָך ביסעקטאָרן פון די ביידע צונויפגעפאַלענע גראָדע ווינקלען A און D· דעריבער מוז דער שניטפּינטל M פון די דיאַגאָנאַלן ליגן אויפן קנייטש, און MA דעקט זיך מיט MD, אָבער MA און MD זיינען דאָך די העלפטן פון די דיאַגאָנאַלן (ווייל די דיאַגאָנאַלן פון יעדן ראָמב שניידן זיך אויף העלפט פיג· 46), און, ווען די העלפטן פון די דיאַגאָנאַלן זיינען גלייך צווישן זיך, זיינען די גאַנצע דיאַגאָנאַלן אויך גלייך·

סימעטריע פון א קוואַדראַט· מיר האָבן געזעהען, אז אַ ראָמב איז סימעטריש בנוגע זיינע דיאַגאָנאַלן, דאָסגלייכן אַ קוואַדראַט· אָבער א קוואַדראַט האָט נאָך צוויי אַנדערע סימעטריאַלע אַקסן· וועלכע? דאָס

זיינען די גראַדע, וואס פארבינדן די מיטנס פון די אנטקעגנדיגע זייטן. ווען דו מאכסט א קנייטש פאזע אטדי גראַדע, דעקן זיך די דערגאנצנדיגע ווינקלען; ווען דו מאכסט א קנייטש פאזע א דיאַגאָנאַל, דעקן זיך די אנטקעגנדיגע ווינקלען, און די אנדערע קנייטשן זיך ארויף אויף זיך גופא.

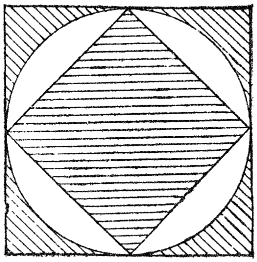
קאָנסטרוקציע פון א קוואַדראַט. ווען דו ווילסט דערצו ניט באנוצן דעם מאָדעל פון א גראָדן ווינקל, איז דער בעסטער מעטאָד צו צייכענען א קוואַדראַט, ווען מען באנוצט די פיגור 46. זאל דארט BD זיין א דיאַגאָנאַל פון דעם קוואַדראַט. M איז דער מיטן פון BD (פיג. 55). פון דעם צענטר M באשרייב א ראָד דורך B און D. ער ווערט דעם פערפענדיקולאר AC צו BD שניידן אין די פינטלעך E און F. פארבינד B, E, D און F איינעם מיטן אנדערן, איז BEDF א קוואַדראַט.



פיג. 55.

ווען עס איז געגעבן די לענג פון דער זייט פונם קוואַדראַט, באנוצן מיר די פיגור 46 בלויז אויף צו קאָנסטרואירן א גראָדן ווינקל, און מיר פארענדיגן די קאָנסטרוקציע פון דעם קוואַדראַט, ווי ביי א ראָמב אויף דער פיגור 50.

אויף דער פיגור 54 איז א קוואַדראַט ארייגעשריבן אין א ראָד, ד. ה. ער איז אזוי געצייכנט, אז זיינע עקן ליגן אויפן רינג. מען דריקט דאס נאָך אנדערש אויס מיט די ווערטער: דער ראָד איז ארומגעשריבן ארום דעם קוואַדראַט. <u>דער צענטער פון דעם ראָד איז דער שניטפינטל פון די דיאַגאָנאַלן פון דעם קוואַדראַט.</u> (פאַרוואָס?)


פיג. 56.

דער שטח פון א קוואַדראַט. דער שטח פון א קוואַדראַט איז א טייל פונם דעם שטח פון דעם ארומגעשריבענעם ראָד. לויט דער אקסיאמע, אז דאס גאנצע איז גרעסער ווי יעדער פון זיינע טיילן, איז דער שטח פון דעם ראָד גרעסער ווי דער שטח פון דעם אריינגעשריבענעם קוואַדראַט (פיג. 56).

איינניטונגען.

1· קאָנסטרואיר א קוואַדראַט אויף א געגעבענעם אָפשניט און צייכן־אויף דעם ארומגעשריבענעם ראָד·

2· צייכן אויף א ראָד און א ארייגעשריבענעם קוואַדראַט·

ווייז דורך דרייאונג, אז אלע קוואַדראַטן, וואס זיינען ארייגעשריבן אין דעמזעלביגן ראָד, האבן גלייכע זייטן און גלייכע שטח׳ס·

3· צייכן אויף א קוואַדראַט, צעטייל זיינע זייטן אויף העלפט און פאר־ביגד זייערע מיטנס· ווייז, אז די באקומענע פיגור איז א קוואַדראַט· (דער נייער קוואַדראַט איז ארייגעשריבן אין דעם אלטן·) דערצו דארפסטו איינ־קנייטשן דעם קוואַדראַט צוויי מאל: איין מאל פאזע איין דיאַגאָנאַל פון דער ארייגעשריבענער פיגור, דאס צווייטע מאל פאזע זיין צווייטן דיאַגאָנאַל·

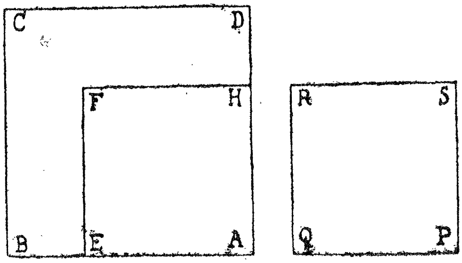
באשרייב ארום דעם קלענערן קוואַדראַט א ארומגעשריבענעם ראָד· דו וועסט געפינען, אז דער ראָד ליגט אינגאנצן אינווייניג אין דעם גרויסן קוואַדראַט, און אז דער רינג גייט אדודך דורך די פיר מיטנס פון די זייטן פון דעם גרויסן קוואַדראַט· אדטער ראָד איז ארייגעשריבן אין דעם קוואַדראַט· זיין צענטער איז דער שניטפינטל פון די דיאַגאָנאַלן· דער גרעסערער קוואַדראַט איז ארומגעשריבן ארום דעם ראָד· דער שטח פון דעם ראָד איז קלענער ווי דער שטח פון דעם ארומגעשריבענעם קוואַדראַט·

פארגלייכונג פון די שטח׳ס פון קוואַדראַטן· ווען דו האסט צוויי קוואַדראַטן מיט גלייכע זייטן, קענסטו אויף א אנדער בלאַט פאפיר קאָנסטרואירן א קוואַדראַט מיט דערזעלביגער זייט, און עס איז קלאר, אז דער דריטער קוואַדראַט וועט זיך דעקן מיט יעדן פון די ביידע אנדערע[1]· דעריבער זיינען קוואַדראַטן מיט גלייכע זייטן קאָנגרועגט, זיי האבן אויך גלייכע שטח׳ס·

ווען מיר האבן צוויי קוואַדראַטן ABCD און PQRS מיט אומגלייכע זייטן, מוז איינער פון זיי האבן א גרעסערע זייט, דהיינו דער קוואַדראַט ABCD· דעמאָלט קענען מיר אָפשניידן פון AB א שטיק $AE = PQ$ און דערפירן דעם קוואַדראַט AEFH אויף AE (פיג· 57)· דער נייער קוואַדראַט האט מיט דעם גרויסן קוואַדראַט א בשותפותדיגן ווינקל A· דער פינטל F מוז ליגן

[1]) אויך דא איז דער דריטער קוואַדראַט גענומען צוליבן טראנסיטיוון פרינציפ

אינווייניג אינם גרויסן קוואַדראַט (דערווייז דאס דורך קנייטשן, ווי אויף פיג. 54). דעריבער איז דער שטח פון דעם קוואַדראַט AEFH קלענער פון דעם שטח פון דעם קוואַדראַט ABCD. אבער AEFH איז קאָנגרועקט מיט PQRS. דערפון איז געדרונגען, אז דער קוואַדראַט PQRS מיט דער קלענערער זייט האט אויך א קלענערן שטח ווי דער קוואַדראַט ABCD מיט דער גרעסערער זייט.



פיג. 57.

די ראַם פון דעם קוואַדראַט AEFH איז אויך קלענער ווי די ראַם פון דעם קוואַדראַט ABCD, ווייל די ראַם AEFH איז אין פיר מאל גרעסער ווי AH, די ראַם פון ABCD איז אין פיר מאל גרעסער ווי AB, דערביי איז AB גרעסער ווי AH. עס איז כדאַי צו באמערקן, אז, פארגלייכנדיג ניט קאָנגרועטע רעדער, האבן מיר דורך באדעקונג געקענט פארגלייכן זייערע שטח׳ס, אדער ניט זייערע רינגען, און מיר האבן ניט געקענט מאכן קיין שום אויספירן וועגן דער לענג פון זייערע רינגען. ביי קוואַדראַטן, זעהסטו, איז עס אנדערש.

כדי צו פארגלייכן צוויי קוואַדראַטן, איז נויטיג און גענוג צו פארגלייכן זייערע זייטן. דער קוואַדראַט מיט דער גרעסערער זייט האט א גרעסערן שטח. קוואַדראַטן מיט גלייכע זייטן האבן גלייכע שטח׳ס.

מאָסן פון שטח. א קוואַדראַט, וואס זיין זייט האט איין סאנטימעטער אין דער לענג, האט איין קוואַדראַטסאנטימעטער אין שטח. אזא קוואַדראַט איז א איינס צו מעסטן דעם שטח בכלל, פונקט ווי א גראַד (דערמאָן זיך) איז א איינס צו מעסטן ווינקלען, א סאנטימעטער איז א איינס צו מעסטן די לענג, א קוואַרט איז א איינס צו מעסטן פליסיג־קייטן וכדומה. דער איינס צו מעסטן דעם שטח איז בכן א קוואַדראַטסאנטי־מעטער. לאמיר באטראכטן א קוואַדראַט, וואס זיין זייט איז 2 סאנטימעטער לאנג. צעטיילן מיר זיינע זייטן אויף העלפט און פארבינדן מיר די מיטנס פון די אנטקעגנדיגע זייטן, האבן מיר דערמיט צעטיילט דעם קוואַדראַט

אויף פיר קליינע קוואַדראַטן, וואָס ביי יעדערן פון זיי האַלט א זייט 1 סאַנטי־מעטער אין דער לענג, דאָס הייסט יעדער פון זיי האָט 1 קוואַדראַטסאַנטי־מעטער אין שטח. בכן האָט דער גרויסער קוואַדראַט, וואָס זיינע זייטן האַלטן 2 סאַנטימעטער, 4 קוואַדראַטסאַנטימעטער אין שטח (2 × 2 קוואַדראַט־סאַנטימעטער); א קוואַדראַט מיט זייטן צו 3 סאַנטימעטער אין דער לענג האָט, אויפן סמך פון פונקט אזא חקירה ווי פריהער, 3 × 3 קוואַדראַטסאַנטימעטער, ד. ה. 9 קוואַדראַטסאַנטימעטער אין שטח; דער שטח פון א קוואַדראַט מיט זייטן צו 4 סאַנטימעטער אין דער לענג האַלט 4 × 4 סאַנטימעטער אין שטח, און אזוי ווייטער:

די זייט פונם קוואַדראַט	דער שטח פונם קוואַדראַט
1 סאַנטימעטער	1 קוואַדראַטסאַנטימעטער
2 ״	4 ״
3 ״	9 ״
4 ״	16 ״
5 ״	25 ״
6 ״	36 ״

די צאָלן 4, 9, 16, 25, 36 וכ"ו הייסן קוואַדראַטישע צאָלן. 4 הייסט דער קוואַדראַט פון 2, 9 דער קוואַדראַט פון 3 א. אז. וו., מחמת 4, 9 א. אז. וו. איז די צאָל פון די קוואַדראַטסאַנטימעטער, וואָס עס האַלט א קוואַדראַט מיט זייטן צו 2, 3 א. אז. וו. סאַנטימעטער. מען שרייבט אויך אזוי: 2^2 הייסט דער קוואַדראַט פון 2, אדער 2 אין קוואַדראַט; 3^2 הייסט דער קוואַדראַט פון 3, אדער 3 אין קוואַדראַט, א. אז. וו.

דער כלל צום אויסרעכענען דעם שטח פון א קוואַדראַט אין קוואַדראַט־סאַנטימעטער איז אזא:

מעסט אויס די זייט פון דעם קוואַדראַט און כופל די צאָל סאַנטימעטער מיט איר אליין, אדער, ווי מיר זאָגן, שטייגער די צאָל אין קוואַדראַט, אדער שטייגער די צאָל אין צווייטן שטאַפּל. דער פּראָדוקט איז די צאָל קוואַדראַט־סאַנטימעטער פון דעם שטח פונם קוואַדראַט.

דער כלל בלייבט א כלל, אויך ווען דו וועסט אנשטאָט א סאַנטימעטער אויסקלייבן א מעטער, אדער אן אייל, אדער אן ארשין פאַר א איינס צו מעסטן די לענג. דער שטח פון א קוואַדראַט מיט זייטן צו 1 מעטער אין דער לענג האַלט 1 קוואַדראַטמעטער; דער שטח פון א קוואַדראַט מיט זייטן צו 2 מעטער אין דער לענג האַלט 4 קוואַדראַטמעטער.

1 מעטער שרייבט מען 1 m, 1 קוואַדראַטמעטער 1 qm.
1 סאנטימעטער שרייבט מען 1 cm, 1 קוואַדראַטסאנטימעטער 1 qcm.

איינניטונגען.

1. ווייז דורך קנייטשן, אז א קוואַדראַט מיט זייטן צו $1/2$ סאנטימעטער אין דער לענג האלט $1/4$ קוואַדראַטסאנטימעטער אין שטח.

2. ווייז, אז א קוואַדראַט מיט זייטן צו $2^1/_2$ סאנטימעטער אין דער לענג האלט $6^1/_4$ קוואַדראַטסאנטימעטער אין שטח.

דער קוב.

§ 16. דעפיניציע פון א קוב.

א גראַדווינקלדיגער פּאַראַלעלעפּיפּעד, וואס אלע קאנטן זיינע זיינען גלייך, הייסט קוב.

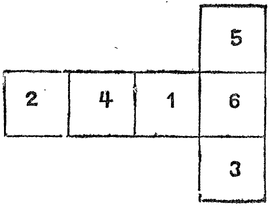
א קוב זעהט אויס ווי א קעסטל מיט גלייכע קאנטן. די תיבה פון תפילין איז א קוב.

לאמיר איצט מאכן א מאָדעל פון א קוב.

די פיגור 58a הייסט אַ «נעץ» פאר אזא מאָדעל. די פיגור 58b הייסט א «צושניט» פאר א מאָדעל פון א קוב.

דו קענסט זיך מאכן אזא נעץ, ווי אויף פיגור 58a.

לייג ארויף דעם נעץ אויף א שטיק טאקטור און דריק איין די אָפּטיילנדיגע ליניעס, שנייד ארויס דעם נעץ פון דעם טאקטור, קנייטש איין פאזע די איינגעדריקטע ליניעס און פארקלעפּ די קאנטן מיט פאפירענע שטרייפנס, וועסט דו באקומען א מאָדעל פון א קוב. אבער עס איז לייכטער אויסצוקנייטשן א פאפירענעם מאָדעל פון א צושניט (פיג. 58b). קנייטש זיך אויס אזא צושניט, שנייד אָפּ די געשטריכלטע טיילן און מאך איינשניטן אין די דיקע ליניעס. איינ־קנייטשנדיג, גיב אכטונג, אז אלע קנייטשן

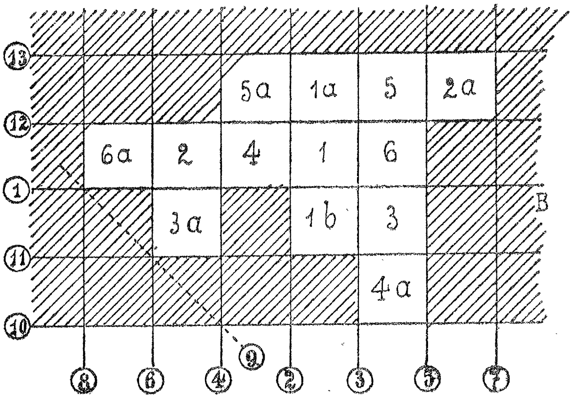


פיג. 58a.

זאלן זיין ארייננעקנייטשט אויף דערזעלביגער זייט פונם בלאַט פאפיר. איצט פארהעפט דעם מאָדעל, אריבערלייגנדיג די קוואַדראַטן, וואס זיינען

באצייכנט מיט דיזעלביגע ציפערי איינעם איבער דעם אנדערן; למשל 5 איבער 5a, 1 איבער 1a און איבער 1b. עס איז ניט שווער אריינצושטעקן די קוואַדראַטן איינעם אין דעם אנדערן. דער לעצטער ווערט אריינגעשטעקט דער קוואַדראַט 6a, וואס האלט פעסט דעם גאנצן מאָדעל.

צוגרייטנדיג דעם צושניט, איז אמבעסטן צו מאכן די קנייטשן אין דעם סדר פון די צאלן אין די קייקלעך, וואס זיינען אנגעשריבן ביי די רענדער פון דער פיגור, מאך דעם קנייטש (1) דורך דעם מיטן פון דיין בלאַט פאפיר; גלעט אויס דאס בלאַט; מאך דעם קנייטש (2) דורך דעם מיטן פון דיין



פיג. 58b.

בלאַט אונטער א גראַדן ווינקל צו (1); דערצו דארפסטו אזוי קנייטשן, אז דער קנייטש (1) זאל זיך אוועקלייגן אויף זיך גופא; גלעט אויס דאס בלאַט; מאך דעם קנייטש (3) פערפענדיקולאר צו (1); די לענג פון דעם טייל פון (1), וואס ליגט צווישן (2) און (3), וועט זיין די לענג פון די זייטן פון דעם קובס ווענטלעך; קנייטש איבעראנייס איין (2); קנייטש איבער־אנייס איין (3), אבער אויף דער אנטקעגנדיגער זייט לגבי דעם ערשטן מאל; קנייטש איין די אנדער העלפט בלאַט פאזע (3), ארונטערקנייטשנדיג דאס פאפיר אונטער (3), [ניט איבער (3), אניט וועט די דיק פון דעם פאפיר איבערפירן די גענויקייט]; דו האסט באקומען דעם קנייטש (4); קנייטש איצט איין דאס פאפיר פוןביידע זייטן פאזע (2), באקומסטו (5) און (6); מאך נאָך צוויי קנייטשן פאזע (3) און (4), באקומסטו (7) און (8).

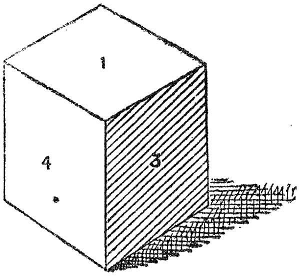
איצט גלעט אויס דאס בלאַט, און קנייטש עס איין אזוי, אז (8) זאל זיך אוועקלייגן אויף (1), באקומסטו דעם דיאַגאָנאַל (9)[1]. דורך די שניטפינטלעך צווישן (4) און (9), ווי אויך צווישן (6) און (9) מאך קנייטשן פערפענדיקו- לאר צו (8), וועסטו באקומען די קנייטשן (10) און (11); גלעט אויס דאס בלאַט; קנייטש איין איבעראנייס (1), און קנייטש אויס די קנייטשן (12) און (13) פאזע (10) און (11)[2].

אויף אזא שטייגער באקומסטו א גאנץ גענויעם צושניט.

עס וועט גוט זיין, ווען דו וועסט באַפאַרבן די קוואַדראַטן אזוי, אז די קוואַדראַטן, וואס געהערן איינער צום אנדערן (למשל 5 און 5a), זאלן האבן איין פאַרב. לאמיר אָפריידן, אז די קוואַ- דראַטן וועלן זיין באפארבן אזוי:

1. אראנזש
2. גרין
3. העלרויט
4. טונקלרויט
5. פיאלעט
6. טונקלגעל

דער אינווייניגסטער רוים פונם קוב שטעלן מיר זיך פאָר טונקלבלוי. דער מדובר וועט זיין ניצליך פאר שפעטער, ווען מיר וועלן אנהייבן צו צעשניידן דעם קוב. די פיגור 59 ווייזט א פארטיגן מאָדעל.



פיג. 59.

ווענטלעך, עקן און קאַנטן פון א קוב.

צייל איצט די ווענטלעך, עקן און קאנטן פון דעם קוב. דו געדענקסט, אז דו האסט שוין פריהער געטאן דאס אייגענע ביי א גראַדווינקלדיגן פּאַראַלעלעפּיפּעד. אזוי ווי דער קוב איז בלויז א ספעציעלער מין פון א גראַדווינקלדיגן פּאַראַלעלעפּיפּעד, מוז די צאל פון די ווענטלעך, עקן און קאנטן זיין דיזעלביגע.

ווענטלעך	6	קאנטן	12
עקן	8		2
	14		14

לייג צו די צאל פון די ווענטלעך צו דער צאל פון די עקן, און לייג צו די צאָל 2 צו דער צאל פון די קאנטן, באקומסטו איןביידע פאלן דיזעלביגע סומע.

[1] דער דיאַגאָנאַל איז נויטיג, כדי דער צושניט זאל ארויסקומען גענויער.
[2] מען דאַרף געדענקען דעם כלל, אז מען טאר ניט קנייטשן דורך צוויי בלעטער.

דער כלל איז חל אויף אלע קערפּער, וואס די ווענטלעך זייערע זיינען פלייניג[1]·

אויף אונזער מאָדעל האבן מיר די ווענטלעך באצייכנט מיט די ערשטע 6 ציפער· ווי וועסטו באצייכנען די קאנטן? אין יעדן קאנט שניידן זיך דאָך צוויי ווענטלעך, דעריבער קענען מיר באצייכענען די קאנטן מיט די צוויי ציפער, וואס באצייכענען די ווענטלעך· אזוי למשל, איז (1, 4) די באצייכענונג פארן קאנט, אין וועלכן עס שניידן זיך די ווענטלעך (1) און (4)·

וויאזוי וועלן מיר באצייכענען די עקן מיט דיזעלביגע ציפער? אין יעדן עק שניידן זיך דריי ווענטלעך, דעריבער קענען מיר באצייכענען יעדן עק מיט די דריי ציפער פון די ווענטלעך, וואס שניידן זיך אין אים· דער קאנט (1, 4), למשל, האט צוויי עקן: (1, 4, 3) און (1, 4, 5)·

דאס איז שוין א אנדער שטייגער צו באצייכענען ווענטלעך, עקן און קאנטן, איידער דער, וועלכן מיר האבן באנוצט ביי דעם פּאַראַלעלעפּיפּעד· דאָרטן האבן מיר קודם־כל באצייכנט די עקן מיט די ערשטע 8 אותיות פון דעם לאטיינישן אלף־בית, יעדן קאַנט מיט 2 אותיות און יעדע ווענטל מיט 3 אותיות· דו געדענקסט, אז מיר האבן דערביי באקומען פארשיידענע באצייכענונגען פאר איין און דערזעלביגער ווענטל, ווייל יעדע ווענטל האט 4 עקן, אבער מיר האבן אינגאנצן נויטיג 3 אותיות אויף צו באצייכענען א ווענטל· די 8 אותיות זיינען טאקע מער סימנים, איידער מען האט נויטיג צו באצייכענען די ווענטלעך, די עקן און קאַנטן פון א קוב· והראיה דו זעהסט דאך, אז עס קלעקן 6 סימנים· מיר האבן באנוצט די ערשטע 6 ציפער אלס סימנים; מיר האבן געקענט אויסקלייבן די ערשטע 6 אותיות, אדער אונזערע פארבן, אדער די נעמען פון יעקב אבינו'ס ערשטע 6 קינדער, אדער וואס פאר ניט איז אנדערע סימנים· אבער, ווען מיר זיינען איין מאל פאר אלע מאל מושווה געווארן אויף די אדער יענע סימנים, קענען מיר די ווענטלעך, עקן און קאַנטן באצייכענען אויף איין באַ־שטימטן אופן·

די דיאַגאָנאַלן· לייען איצט די דיאַגאָנאַלן פון די ווענטלעך, אנרופנדיג זיי מיט די ציפער פון די עקן, וואס זיי פארבינדן· ניט אלע דיאַגאָנאַלן זיינען דיאַגאָנאַלן פון די ווענטלעך· למשל, די גראדע צווישן (1, 3, 4) און (2, 5, 6)· דו זעהסט, אז דאָ האבן מיר אלע ציפער צוזאמען,

אינדערצייט ווען ביי א דיאַגאָנאַל פון א ווענטל, למשל, ביי (1, 3, 6) און (1, 4, 5), פעלט איין ציפער, דהיינו דער ציפער פון דער אנטקעגנדיגער ווענטל. וואס איז די גראָדע, וואס פארבינדט (1, 3, 4) מיט (2, 5, 6)? זי איז א קערפערליכער דיאַגאָנאַל פון דעם קוב. האלט דעם קוב אזוי, אז די גראָדע זאל שטיין ווערטיקאל. דו קענסט זי ניט זעהען, ווייל זי ליגט אינוויינינ אין דעם קוב. אבער דו קענסט זי זיך פאָרשטעלן. ווען דער קוב וואלט געווען א גלעזערנער, און דער דיאַגאָנאַל א קאָלירטער פאָדים, וואלטסטו אים געקענט זעהען.

ווייז מיר אלע קערפערליכע דיאַגאָנאַלן און רוף מיר זיי אָן!
(2, 5, 6) (1, 3, 4) און (1, 3, 6) (2, 4, 5) און (1, 5, 6) (2, 3, 4) און (2, 3, 6) (1, 5, 4).

האלט דיין מאָדעל אזוי, אז די ווענטלעך (4) און (6) זאלן ליגן צווישן דעם גרויסן פינגער און דעם מיטלסטן פינגער. שטעל אוועק דעם מאָדעל מיט דעם קאַנט (2, 5) אונטן און דעם קאַנט (1, 3) אויבן; די ווענטל (1) זאל זיין צוגעקערט צו דיר. לינקס פון דעם קאַנט (1, 3) זעהסטו איצט די ווענטל (6), רעכטס — די ווענטל (4). דו ווייסט, אז דורך יעדע דריי פינט־לעך קען מען דורכפירן א פליין. ווען דו ווערסט דורכפירן א פליין דורך די עקן (1, 5, 6), (1, 5, 4) און (2, 3, 4), וועט דער פליין דורכגיין דורך דעם קאַנט (2, 3) און דורך דעם פינטל (2, 3, 6). אבער וויבאלד ער גייט אַדורך דורך די צוויי עקן (1, 5, 6) און (2, 3, 6), מוז ער אויך דורכגיין דורך דער גראָדער, וואס פארבינדט זיי. דער פליין ליגט האָריזאָנטאַל. מיר האבן אויף אזא אופן 4 עקן, וואס ליגן אויף איין פליין, וואס איז ניט קיין ווענטל פון דעם קוב. דו ווייסט, אז פיר פינטלעך, אויסגעקליבענע גלאט אין דער וועלט, ליגן געוואוינליך ניט אויף איין פליין. ווען אונזערע פיר עקן ליגן יאָ אויף איין פליין, איז עס מחמת דער סימעטריע פון א קוב.

וועלכע קערפערליכע דיאַגאָנאַלן ליגן אויף אונזער האָריזאָנטאַלן פליין?
(2, 3, 6) (1, 5, 4) און (2, 3, 4) (1, 5, 6).

די אנדערע צוויי קערפערליכע דיאַגאָנאַלן ליגן אויפן ווערטיקאלן פליין, וואס גייט דורך די קאַנטן (1, 3) און (2, 5).

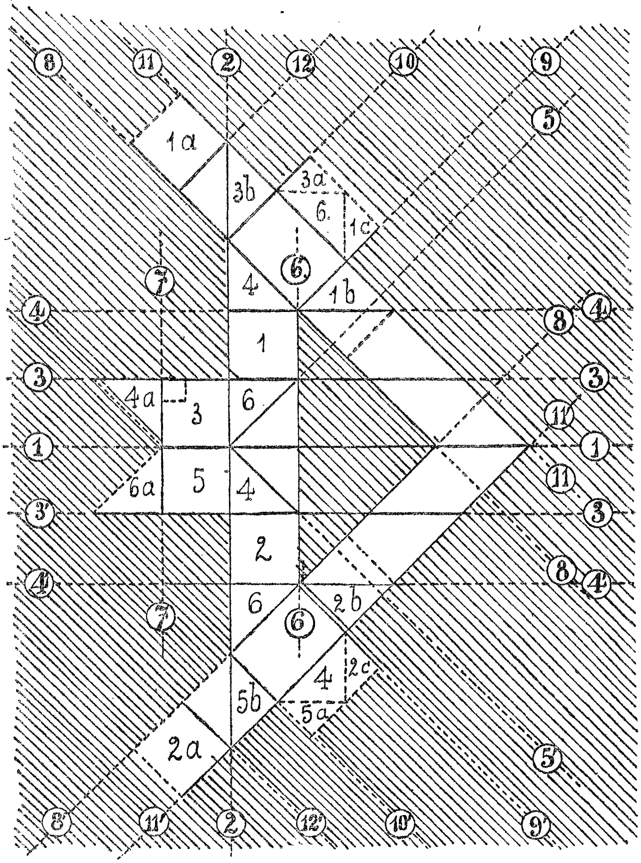
ווען מיר וועלן דורכשניידן אין די געדאנקען דעם קוב פאזע אונזער האָריזאָנטאַלן פליין, וועט ער צעפאַלן אויף צוויי קערפער, אויף צוויי פ ר י ז מ ע ס, וואס האבן דיזעלביגע גרייס און דיזעלביגע פאָרם.

נעם א שטיקל געוואוינליכע זייף מיט גלאטע ווענטלעך· צייכן אויף א קליינעם קוואַדראַט אויף א שטיקל פאפיר און דריק ארויף דאס שטיקל פאפיר אויף דעם שטיקל זייף· איצט קענסטו מיט א מעסער אויסשניידן א קוב (אויפן אויג)· דארפסט נאר זעהען שניידן אקוראט ווערטיקאל· שנייד דורך דעם זייפענעם קוב, ווי דו האסט אין די געדאנקען דורכגעשניטן דעם פאפירענעם מאָדעל, וועסטו באקומען צוויי זייפענע פריזמעס· שטעל זיי אוועק אויפן טיש אזוי, אז אויפן טיש זאלן ליגן די פליינען פון דעם שניט, און איינע פון די ווענטלעך פון קוב (למשל 1) זאל זיין צוגעקערט צו דיר· וויפיל ווענטלעך האט יעדע פריזמע? די אונטערשטע ווענטל, די פאדערשטע ווענטל (1), די הינטערשטע ווענטל (3) און צוויי זייטיגע ווענטלעך, העלפטן פון פריהערדיגע ווענטלעך פונם קוב· יעדע זייטיגע ווענטל האט דריי זייטן און דריי ווינקלען, וואס איינער פון די ווינקלען, דהיינו דער, וואס ליגט ביים עק פון קאַנט (1, 3), איז א גראָדער· די זייטיגע ווענטל איז שוין ניט קיין קוואַדראַט, נייערט א דרייעק· דו קענסט אוועקשטעלן די פריזמע אנדערש, דהיינו מיט דעם דרייעק אַראָפּ·

מאָדעל פון א פּאָר פריזמעס, וואס בילדן צוזאמען א קוב·

די פיגור 60a גיט דיר דעם צושניט דערצו· די ליניע (1) טיילט אפ ביידע פריזמעס איינע פון דער אנדערער· די ליניעס פאר ביידע פריזמעס זיינען גלייך באצייכנט, אבער פאר דער אונטערשטע איז צוגעגעבן א שטריך (3_1, 4_1)· די ליניעס 3, 4 און 3_1, 4_1 קנייטשט מען אויס אזוי, ווי פאר א קוב· די ליניע 5 איז דער ביסעקטאָר פון די 2 שכנישע ווינקלען צווישן (1) און (2) און שניידט (3) אין די פינטלעך, דורך וועלכע מען דארף פירן (6)· קנייטש איבעראנייס איין (2) און קנייטש אויס (7) פאזע (6); (8) איז דער ביסעקטאָר פון דעם ווינקל צווישן (4) און (6); (9) און (10) ווערן אויסגעקנייטשט פערפענדיקולאר צו (8) דורך די שניטפינטלעך פון (8) מיט (6) און מיט (2)· לייג ארויף (9) אויף (6), דריק איין מיט דעם בליישטיפט דעם פינטל פון (9), וואס ליגט אויף דעם שניטפינטל צווישן (6) און (3): דאס איז דער פינטל P, דורך וועלכן דו מוזט איצט קנייטשן (11) פערפענדיקולאר צו (9)· איצט קנייטש אויס (12) דורך דעם שניטפינטל צווישן (11) און (2), פערפענדיקולאר צו (11)· די געפינטלטע ליניעס לאזן זיך לייכט אויסקנייטשן, נאכדעם ווי מען האט אויסגעשניטן דעם מאָדעל·

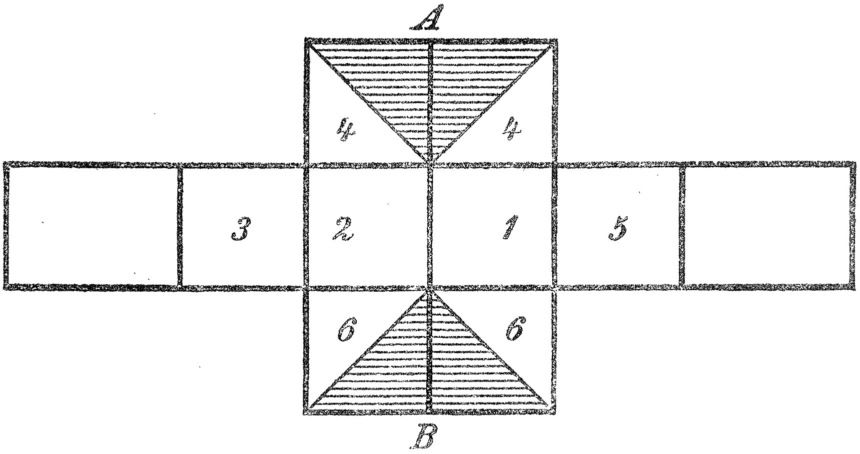
לייכטער, אבער ניט אזוי געניי קענען צוויי מאָדעלן פון פּריזמעס, וואס בילדן צוזאמען א קוב, געמאכט ווערן פון טאקטור, באנוצנדיג א נעץ· צייכענען אזא נעץ איז זעהר לייכט לויט דער פיגור 60b [1]) די גרויסע זייטן פון די זייטיגע קעסטלעך זיינען גלייך די דיאַגאָנאַלן פון די קוואַדראַטן·



פיג· 60a

[1]) דעם אויפגעצייכנטן נעץ לייגסטו ארויף אויף דיין טאקטור, דריקסט איין די ליניעס, שניידסט ארויס די גאנצע פיגור, און שניידסט זי דורך דורך AB· פוןביידע העלפטן קנייטשט דו אויף צוויי פּריזמעס און פארקלעפסט די קאַנטן מיט פּאפּיר·

די ציפער אויף די קוואַדראַטן און אויף די האלבע קוואַדראַטן (אויף דעם צושניט) זיינען דיזעלביגע ווי אויף די געהעריגע ווענטלעך פון דעם קוב· ביידע גרויסע ווענטלעך אהן ציפער (אויף דעם נעץ זיינען דאס די זייטיגע קעסטלעך) זיינען די שניטן דורך דעם קוב· באפארבנדיג די ווענטלעך פון

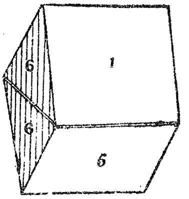


פיג· 60b·

די פריזמעס· וועסטו די גרויסע ווענטלעך באפארבן טונקלבלוי· לויט אונזער מדובר· ווייל דער אינווייניגסטער רוים פון דעם קוב איז דאך אינגאנצן טונקלבלוי· די קערפערליכע דיאַגאָנאַלן פון דעם קוב זיינען די דיאַגאָנאַלן פון די בלויע ווענטלעך·

דער צענטער פון דעם קוב· דער שניטפינטל פון די דיאַגאָנאַלן אויף די בלויע ווענטלעך איז דער צענטער פון דעם קוב· דאס איז א פינטל אינווייניג אין דעם קוב· וועלכן מיר קענען ניט זעהען אויף דעם מאָדעל פון דעם קוב· אבער מיר קענען אים זיך פארשטעלן· ווי מיר שטעלן זיך פאר דעם צענטער פון א קויל אין זיין מיטן· שטעל אוועק דעם מאָדעל פון דעם קוב און די מאָדעלן פון ביידע פריזמעס· וואס בילדן צוזאמען א קוב· איינעם לעבן דעם אנדערן· מיט דער זייט 4 אויף אויבן· און צוגעקערט צו דיר מיט דעם קאַנט (1, 5)· דו וועסט לייכט געפינען

אויף דער אויבערשטער ווענטל 4 דעם פּינטל, אונטער וועלכן עס ליגט דער צענטער פון דעם קובּ. דאָס איז דער שניטפּינטל פון די דיאַגאָנאַלן פון דער אויבערשטער ווענטל. ווען מיר וועלן דורכשניידן דעם קובּ דורך דעם צווייטן דיאַגאָנאַל פון דער אויבערשטער ווענטל, – ניט דורך דעם, דורך וועלכן מיר האָבן באַקומען אונזערע פּריזמעס, – וועט אויך דער נייער שניט דורכגיין דורך דעם צענטער און צעטיילן דעם קובּ אויף 2 פּריזמעס, וואָס וועלן זיין גלייך די ערשטע פּאָר פּריזמעס, בלויז דער סדר פון די פאַרבן וועט ביי זיי זיין אַן אַנדערער. אויף די בלויע ווענטלעך פון די נייע פּריזמעס וועט ווידער ליגן דער צענטער; דאָס וועט זיין דער שניט־פּינטל פון זייערע דיאַגאָנאַלן, ד. ה. פוןביידע אַנדערע



פיג. 61.

קערפּערליכע דיאַגאָנאַלן פון דעם קובּ. דערפון זעהען מיר, אַז אַלע פיר קערפּערליכע דיאַגאָנאַלן פון אַ קובּ שניידן זיך אין איין פּינטל. אָטדער פּינטל הייסט דער צענטער פון דעם קובּ. ער ליגט פּונקט אינמיטן צווישן די שניטפּינטלעך פון די דיאַגאָנאַלן פון צוויי אַנטקעגנדיגע ווענטלעך פון דעם קובּ (פון דער אויבערשטער און פון דער אונטערשטער ווענטל).

סימעטריע פון אַ קובּ. ביידע פּריזמעס, וואָס מיר האָבן באַקומען, דורכשניידנדיג דעם קובּ, זיינען פולקום גלייך איינע דער אַנדערער, ניט רעכענענדיג די פאַרבן פון זייערע ווענטלעך, וואָס האָבן קיין שום שייכות ניט צום געאָמעטרישן קובּ, ווייל זיי זיינען בלויז פּראַקטישע סימנים. די פּריזמעס זיינען אָפּשפּיגלונגען איינער פון דעם אַנדערן; דריק צו איין פּריזמע מיט דער בלויער ווענטל צום שפּיגל, וועסטו אין שפּיגל דערזעהען די צווייטע פּריזמע, און ביידע פּריזמעס צוזאַמען, – די, וואָס אויף דעם שפּיגל, און די, וואָס אין דעם שפּיגל, – וועלן בילדן אַ קובּ. וואָס דינער דאָס גלאָז פון דעם שפּיגל איז, אַלץ בולטער וועט זיין דער קובּ. אַם־בעסטן איז אַ מעטאַלענער שפּיגל, אַ גלאַטע זילבערנע ווענטל, אָדער אַ גלאַט פּאָלירט בלאַט צינקבלעך.

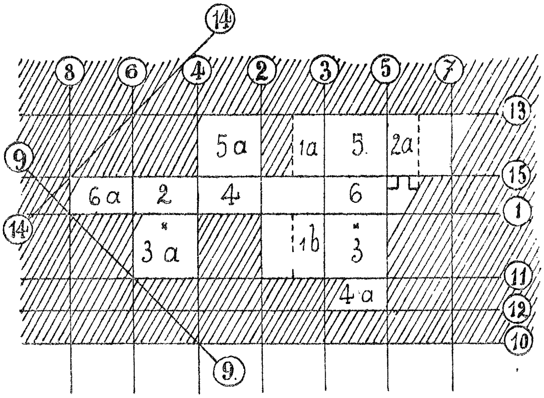
דו זעהסט, אַז אַ קובּ איז סימעטריש בנוגע אַ פליין, וואָס גייט אַדורך דורך צוויי קערפּערליכע דיאַגאָנאַלן זיינע. וויפיל אַזעלכע פליינען קען מען דורכפירן אין אַ קובּ? פּונקט אַזויפיל, וויפיל ווענטלעך ער האָט, וואָרום יעדער פליין אַזעלכער גייט דורך אַ דיאַגאָנאַל, וואָס גייט פון איין

ווענטל צו דער אנטקעגנדיגער, אזויאז פאר יעדער פּאָר אנטקעגנדיגע ווענטלעך איז פארהאן א פּאָר אזעלכע פליינען. ד. ה. עס איז פארהאן אזויפיל פּאָרן אזעלכע פליינען, וויפיל פּאָרן אנטקעגנדיגע ווענטלעך עס איז פארהאן, אדער אזויפיל פליינען, וויפיל ווענטלעך. בכן, האבן מיר 6 פליינען, בנוגע וועלכע דער קוב איז סימעטריש. זיי אלע גייען אַדורך דורך דעם צענטער.

אבער דאס זיינען ניט די איינציגע פליינען, וואס בנוגע זיי איז א קוב סימעטריש. רוף מיר אן נאך א אנדער פליין אזא, אנקוקנדיג דעם מאָדעל. ווען א סימעטריאַלער פליין פון א קוב שניידט איינע פון זיינע ווענטלעך, מוז די ליניע, אין וועלכער דער פליין שניידט די ווענטל, זיין א סימעטריאַלע אקס פון דער ווענטל. וואס פאר סימעטריאַלע אקסן האט א קוואדראט, חוץ די ווענטלעך? די גראַדע, וואס פארבינדן די מיטנס פון די אנטקעגנדיגע זייטן. אטדי גראַדע גייען אַדורך דורך דעם שניטפּינטל פון די דיאַגאָנאַלן פון דעם קוואדראט. ווען מיר וועלן ווערטיקאל דורכשניידן דעם קוב פאזע דער גראַדער, וואס פארבינדט די מיטנס פון די אנטקעגנדיגע זייטן (1, 4) און (2, 4) פון דעם אויבערשטער ווענטל 4, טאָ דורך וועלכען פינטל אינווייניג אינם קוב וועט דורכגיין דער שניט? דורך דעם צענטער! דער שניט וועט צעטיילן אויף העלפט צוויי אנטקעגנדיגע זייטן פון די ווענטלעך 1 און 2, און ממילא צוויי אנטקעגנדיגע זייטן פון דער ווענטל 6. דאס הייסט, אז דער פליין פון אונזער שניט צעטיילט סימעטריש יעדע ווענטל, וואס ער שניידט דורך. די צוויי אנדערע ווענטלעך, 3 און 5, זיינען אפשפיגלונגען איינע פון דער אנדערער בנוגע דעם פליין פונם שניט. דערפון איז געדרונגען, אז א קוב ווערט געטיילט סימעטריש דורך יעדן פליין, וואס גייט אַדורך דורך זיין צענטער און צעטיילט אויף העלפט די אנטקעגנדיגע זייטן פון וואס פאר ניט איז ווענטל.

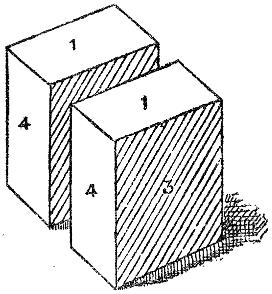
וויפיל איז פארהאן אזעלכע פליינען? אזויפיל פליינען, וויפיל פּאָרן אנטקעגנדיגע ווענטלעך עס איז פארהאן, ווארום ביי יעדן סימעטריאַלן שניט אזעלכן בלייבן דאך צוויי ווענטלעך ניט דורכגעשניטענע, ווי די ווענטלעך 3 און 5 אין אונזער פריהערדיגן משל. עס זיינען אבער פארהאן 3 פּאָרן אנטקעגנדיגע ווענטלעך, דעריבער זיינען פארהאן 3 אזעלכע סימעטריאַלע פליינען. ווען דער מאָדעל שטייט, זיינען צוויי פון אונזערע סימעטריאַלע פליינען ווערטיקאל, און איינער האָריזאָנטאַל. וואס פאר קערפּער זיינען די סימעטרישע העלפטן, אויף וועלכע אזא סימעטריאַלער

פליין צעטיילט דעם קוב? זיי זיינען גראַדווינקלדיגע פּאַראַלעלעפּיפּעדן. פיגור 63 ווייזט דאס דיר, און אויף דער פיגור 62 זעהסטו א צושניט פאר א גראַדווינקלדיגן פּאַראַלעלעפּיפּעד. ער ווערט געמאכט, ווי דער צושניט



פיג. 62.

פאר א קוב, נאר ניט אלע קעסטלעך זיינען קוואדראטן. אייגנטליך, וואלט מען געדארפט געבן א טאפּעלן צושניט, דהיינו פאר ביידע פּאָר פּאַראַלעלעפּיפּעדן, אויף וועלכע א קוב ווערט צעטיילט, פּונקט ווי מיר האבן געגעבן אזא טאפּעלן צושניט פאר די פּריזמעס, אבער מיר טוען עס ניט, כדי די פיגור זאל ניט פארנעמען צופיל אָרט. דו קענסט שוין אליין דערגאנצן דעם צושניט, פארשטייענדיג, אז די צווייטע העלפט זיינע מוז זיין אן אפּשפּיגלונג פון דער ערשטער און ליגן אויף דער אנדערער זייט פון דער ליניע (13). אויף דער פיגור 62 זיינען צו די ציפער 5 און 3 צוגעגעבן צלמלעך. די צלמלעך גיבן צו וויסן, אז אין איין מאָדעל איז דער ×5 די

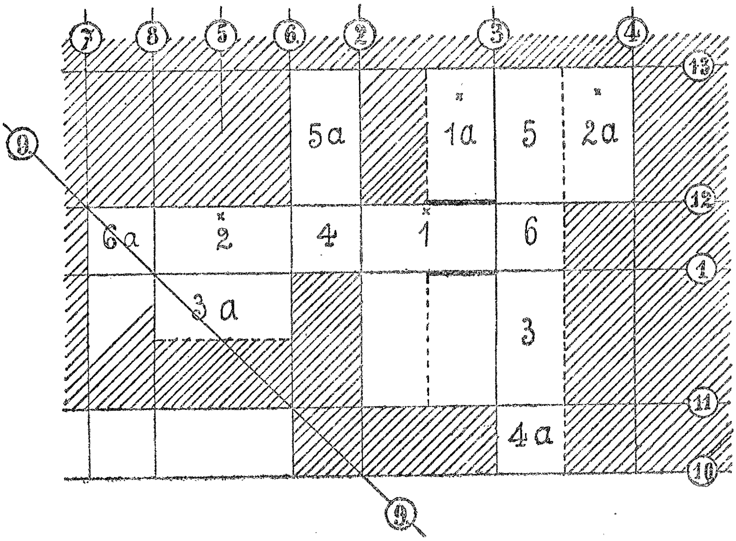


פיג. 63.

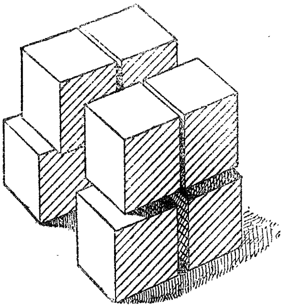
בלויע ווענטל (דער שניט דורך דעם אינווייניגסטן רוים פון דעם קוב), אין דעם אנדערן מאָדעל (פארן צווייטן פּאַראַלעלעפּיפּעד) איז עס דער ×3. נאכן אויסשניידן דעם צושניט וואלט מען געדארפט איינקנייטשן די ווענט-

לעך 1a, 2a און 1b פאזע די פונקטירטע ליניעס, עס איז אבער גענוג אפצושניידן דאס געשטריכלטע צינגל ביי 1a; דאס צינגל פון 1b קען שוין דעמאלט אריינגעשטעקט ווערן; דעריבער איז עס ניט געשטריכלט.

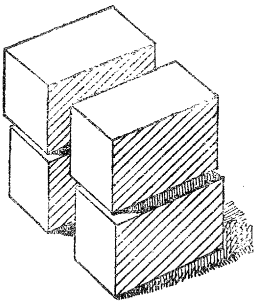
ווען מיר צעשניידן איצט דעם קוב פאזע א צווייטן סימעטריאַלן פליין אזעלכן, טיילן מיר יעדן פּאַראַלעלעפּיפּעד איוף צוויי נייע גראַדווינקלדיגע



פיג. 64.



פיג. 66.



פיג. 65.

פּאַראַלעלעפּיפּעדן (פיג. 63). מען קען זיי אויסקנייטשן לויט דעמזעלביגן פּרינציפּ ווי פריהער. דער צושניט פאַר זיי איז געגעבן אויף פיגור 64.

ווען מיר וועלן איצט דורכשניידן דעם קוב פּאזע דעם דריטן, האָרי־זאָנטאַלן סימעטרישן פליין, וועט יעדער פּערטעל צעטיילט ווערן אין צוויי קליינע קובן, וואס די זייטן זיינע וועלן זיין אין צוויי מאל קלענער, איידער די זייטן פון דעם אינאנהייבדיגן קוב (פיג. 66).

דער גראָדעק.

§ 17. דעפיניציע פון א גראָדעק.

אין דעם מאָדעל פון א פּריזמע (פיג. 60) איז די בלויע ווענטל פון דער פּריזמע, דער שניט דורך דעם אינווייניגסטן רוים פון דעם קוב, ניט געווען קיין קוואדראט. זי איז געגליכן צו א קוואדראט בלויז דערמיט, וואס זי איז א פירזייטיגע, א פירעקיגע פיגור, וואס די ווינקלען אירע זיינען גראָדע. אבער אירע זייטן זיינען ניט אלע גלייך; זיי זיינען בלויז פּאָרווייז גלייך: די אנטקעגנדיגע זייטן זיינען גלייך, די שכנישע ניט. אזא פיגור הייסט גראָדעק.

אין אונזערע מאָדעלן פון די טיילן פון א קוב האבן מיר אפט געזעהען גראָדעקן, דהיינו פאַרשיידענע ווענטלעך פון די פּאַראַלעלעפּיפּעדן.

דו זעהסט, אז א קוואדראט איז א ספּעציעלער פאַל הן פון א ראָמב והן פון א גראָדעק. ביי א ראָמב זיינען אלע זייטן גלייך, די ווינקלען זיינע זיינען פּאָרווייז גלייך: די אנטקעגנדיגע ווינקלען זיינען גלייך, די ווינקלען וואס ליגן ביי איין זייט, זיינען ניט גלייך. ביי דעם גראָדעק זיינען, פאַרקערט, די ווינקלען אלע גלייך, און די זייטן זיינען פּאָרווייז גלייך. א וויכטיגער אונטערשייד צווישן די צוויי פיגורן איז דער: די זייט פון א ראָמב קען האבן ליאַד וועלכע גרייס, אבער די אומגלייכע ווינקלען פון א ראָמב הענגען אפּ איינער פון דעם אנדערן, זיי מאכן אויס צוזאמען שטענדיג צוויי גראָדע ווינקלען, דעריבער איז דער ראָמב באשטימט, (ד. ה. ער קען קאנסטרואירט ווערן), ווען מיר ווייסן די לענג פון דער זייט און די גרייס פון איין ווינקל; אין א גראָדעק איז דער ווינקל באשטימט, ער איז שטענדיג א גראָדער, מיר ווייסן אים לכתחילה, אבער די זייטן הענגען ניט אפּ איינע פון דער אנדערער, און, וויסענדיג איין זייט, ווייסן

מיר נאָך ניט די צווייטע (ניט אַזוי ווי ביי די ווינקלען פון אַ ראָמב), דריי־בער קען אַ גראָדעק קאָנסטרואירט ווערן, ווען מיר ווייסן ביידע שכנישע זייטן זיינע; אָבער דעמאָלט איז שוין דער גראָדעק פולקום באַשטימט, ד. ה. אַלע אַזוינע גראָדעקן מיט דיזעלביגע זייטן, וויפיל מיר זאָלן זיי ניט קאָנסטרואירן, וואו מיר זאָלן זיי ניט קאָנסטרואירן, זיינען קאָנגרוענט. זיי שיידן זיך אונטער בלויז מיט זייער לאַגע אין דעם רוים.

א גראָדעק איז באַשטימט דורך צוויי שכנישע זייטן זיינע. דער בלויער גראָדעק אויף דעם מאָדעל פון אַ פּריזמע איז באַשטימט דורך דעם דיאַגאָנאַל פון דעם קובס ווענטל און דורך דעם קובס קאַנט.

דער פּערפּענדיקולאַר.

§ 18. פּערפּענדיקולאַרע ליניעס און פלייענען.

ווען מיר צעטיילן אַ קוב אויף צוויי פּריזמעס, איז די בלויע ווענטל (דער שניט) אַ גראָדעק. דער קאַנט (1,5), דורך וועלכן מיר האָבן געפירט דעם שניט, און וואָס איז פּערפּענדיקולאַר צו ביידע קאַנטן פון דער ווענטל 6, וואָס שניידן זיך מיט אים, איז, ווי עס ווייזט אויס, אויך פּערפּענדיקולאַר צו דעם דיאַגאָנאַל פון דער ווענטל 6, מיט וועלכן ער שניידט זיך אויכעט.

מיר קענען לייכט באַווייזן, אַז ניט נאָר דאָס ווייזט אַזוי אויס, נייערט עס איז אין אמתן אַזוי. באַצייכן אויף דער פּריזמע דעם פּינטל (1,5,4) מיט A, דעם פּינטל (1,5,6) מיט B און די אַנדערע עקן פון דער בלויער ווענטל מיט C און D. די בלויע ווענטל וועט הייסן ABCD. אויף דער אַנדער פּריזמע באַצייכן די עקן מיט דיזעלביגע אותיות, אָבער מיט שטריכן. איצט לאָמיר אומדרייען די צווייטע פּריזמע מיט דער אויבערשטער זייט אויף אונטן, אַזוי אַז D′ זאָל ליגן אויף B, A′ אויף C און C′ אויף A. דער ווינקל ABC דעקט זיך מיט דעם ווינקל C′D′A′: זיי זיינען גלייכע ווינקלען. לאָמיר אַ דריי טאָן די צווייטע פּריזמע אַרום איר קאַנט A′D′, אַזוי אַז איר ווענטל 4 זאָל זיך אָנועקלייגן אויף דער ווענטל 6 פון דער ערשטער פּריזמע. דעמאָלט שטייט די ערשטע פּריזמע אויף דער צווייטער אַזוי, אַז ביידע קוואַדראַטישע ווענטלעך זייערע 1 און 2 ליגן אויף איין פלייען און האָבן איין זייט אַ בשותפותדיגע (ריכטיגער צוויי צונויפ־געשמאָלצענע זייטן); זי ענדיגט זיך אויף איין מאָדעל אין B, אויף דעם

אנדערן אין 'D, דעריבער ליגןביידע זייטן BA און 'C'D, וואס זיינען ביידע פּערפּענדיקולאר צו דער בשותפותדיגער זייט, אויף איין גראָדער. די גלייכע ווינקלען ABC און 'C'D'A זיינען איצט ווינקלען, וואס ווערן געבילדעט פון דער גראָדער $\overline{ABC^1D^1}$ מיט דער גראָדער BC, ד. ה. יעדער פון זיי איז א גראָדער; דאס באווייזט, אז דער קאַנט (1,5) אדער AB איז פּערפּענדיקולאר צו דעם דיאַגאָנאַל BC פון דער ווענטל 6, ווי דו האסט שוין פריהער אפגעשאצט אויפן אויג. ווען דו ווערסט א גראָדווינקלדיגן פּאַראַלעלעפּיפּעד צעטיילן אויף צוויי גלייכע פּריזמעס, דורכשניידנדיג אים דורך צוויי אנטקעגנדיגע קאַנטן, איז דער שניט שטענדיג אַ גראָדעק. דאס קענסטו לייכט באווייזן, פונקט ווי פריהער.

שטעל אוועק דעם קוב מיט דער ווענטל 6 אויף דעם טיש און מיט דער ווענטל 5 צוגעקערט צו דיר, דער קאַנט (1,5), אדער AB, שטייט דעמאלט לינקס. שנייד אפּ פון דעם קוב א שמאלן גראָדווינקלדיגן פּאַראַלעלעפּיפּעד, אין וועלכן עס זאל ארייננגיין דער קאַנט AB. ווען מיר וועלן דעם פּאַראַלעל־עפּיפּעד צעטיילן אויף 2 פּריזמעס, וועט דער שניט דורכגיין דורך א גראָדער אויף דער ווענטל 6, וואס גייט אַדורך דורך B, און דער קאַנט AB וועט זיין פּערפּענדיקולאר צו אָטדער גראָדער אויפן סמך פון דער פריהערדיגער חקירה. ווען מיר וואלטן אויפן זעלביגן שטייגער אפגעשניטן אנדערע גראָדווינקלדיגע פּאַראַלעלפּיפּעדן פון דעם קוב, — ברייטערע אדער שמע־לערע, איידער דער ערשטער, — וואלטן מיר דערגאנגען, אז AB איז פּער־פּענדיקולאר צו אנדערע שטראלן, וואס גייען ארויס פון B און ליגן אויף דער ווענטל 6. דאס הייסט, אז AB איז פּערפּענדיקולאר צו אלע שטראלן, וואס גייען ארויס פון B און ליגן אויף דער ווענטל 6, ווייל צו יעדן אזעלכן שטראל קען מען געפינען א צוגעפּאסטן פּאַראַלעלעפּיפּעד.

ווען א גראָדע, וואס שניידט א פליין, איז פּערפּענדיקולאר צו צוויי גראָדע אויף דעם פליין, וואס גייען אַדורך דורך איר שניטפּינטל מיט דעם פליין, דעמאלט איז זי פּערפּענדיקולאר צו אלע גראָדע אויף דעם פליין, וואס גייען אַדורך דורך אָטדעם שניטפּינטל.

ווען א גראָדע און א פליין האבן אזא צואנאנדערדיגע לאגע, דעמאָלט זאגט מען, אז זיי שטייען פּערפּענדיקולאר צואנאנדער. דער קאַנט (1,5) שטייט פּערפּענדיקולאר צו דער ווענטל 6 פון דעם קוב, אדער דער קאַנט (1,5) איז א פּערפּענדיקולאר צו דער ווענטל 6. אין א קוב שטייט יעדער קאַנט פּערפּענדיקולאר צו צוויי ווענטלעך, וועלכע ער שניידט.

ווען מיר וועלן אוועקשטעלן דעם קאַנט (1, 5) ווערטיקאַל, וועט די ווענטל 6 ליגן האָריזאָנטאַל. א ווערטיקאַלע ליניע און א האָריזאָנטאַלער פליין שטייען פּערפּענדיקולאר צוזאַנאַנדער. ווען א ווערטיקאַלע ליניע שניידט זיך מיט א האָריזאָנטאַלער ליניע, זיינען זיי פּערפּענדיקולאר איינע צו דער אַנדערער.

(מיר האָבן פריהער געזאָגט «האָריזאָנטאַלער פליין». אייגנטליך, איז דער באַגריף «האָריזאָנטאַל» שוין כולל דעם באַגריף «פליין» אדער דעם באַגריף «גראָרע». דעריבער וואָלט געווען ריכטיגער צו זאָגן «האָריזאָנ־טאַלער אויבערפלאַך», ניט «פליין». דעריבער זאָגן מיר אויך ניט האָריזאָנטאַלע גראָדע, נייערט האָריזאָנטאַלע ליניע).

גלייכאַקסלדיגע דרייעקן.

§ 19. דעפיניציע פון א גלייכאַקסלדיגן דרייעק.

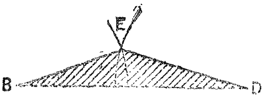
א פליינ־יגע פיגור ABD (פיג. 46), וואָס האָט דריי עקן, הייסט דרייעק. א דרייעק האָט דריי זייטן. וועגן יעדער זייט, וואָס פאַרבינדט צוויי עקן פון א דרייעק, זאָגט מען, אַז זי איז די אַנטקעגנדיגע זייט פונם דריטן עק.

א דרייעק, וואָס צוויי זייטן זיינע, AB און AD אויף דער פיגור 46, זיינען גלייך, הייסט א גלייכאַקסלדיגער דרייעק. די צוויי גלייכע זייטן רופט מען די אַקסלען פון דעם דרייעק. די דריטע זייט רופט מען דעם גרונט פון דעם גלייכאַקסלדיגן דרייעק. דער עק אַנטקעגן דעם גרונט הייסט דער שפּיץ פון דעם גלייכאַקסלדיגן דרייעק. דער ווינקל, וואָס ליגט אַנטקעגן דעם גרונט, הייסט דער ווינקל ביים שפּיץ. ביידע איבעריגע ווינקלען רופט מען די ווינקלען ביים גרונט.

קאָנסטרוקציע פון א גלייכאַקסלדיגן דרייעק. די פיגור 46 ווייזט אונז, וויאַזוי מען קאָנסטרואירט א גלייכאַקסלדיגן דרייעק מיט א געגעבענעם גרונט און מיט געגעבענע אַקסלען. מיר נעמען דעם גרונט BD, און פון די עקן B און D באַשרייבן מיר צוויי רעדער מיט א ראַדיוס, וואָס איז גלייך דער לענג פון די געגעבענע אַקסלען; די רעדער שניידן זיך אין דעם פינטל A. דער דרייעק ABD איז דער פאַרלאַנגטער. די פיגור 49 ווייזט, וויאַזוי מען קנייטשט אויס אַזאַ דרייעק. פון דעם, וואָס מיר האָבן

געהאט געזאגט וועגן זיך שניידנדיגע רעדער, קען געדרונגען ווערן, אז BA מוז זיין גרעסער, ווי די העלפט פון BD. אַחוץ אָטדעם תנאי, האבן מיר א ברירה צו נעמען די לענג פון די זייטן, ווי מיר ווילן.

ווען דער גרונט פון א גלייכאקסלדיגן דרייעק האט דיזעלביגע לענג, ווי די אקסלען, הייסט דער דרייעק א גלייכזייטיגער דרייעק, ד. ה. ער האט גלייכע זייטן.



פיג. 67.

ניט אלע דרייעקן זיינען גלייכאקסלדיגע. ווען מיר נעמען צוויי אומגלייכע ראדיוסן, און קיינער פון זיי איז ניט גלייך BD, און מיר באשרייבן מיט זיי רעדער פון די צענטרס B און D, און די רעדער שניידן זיך אין E, איז BDE ניט קיין גלייכאקסלדיגער דרייעק (פיג. 67); מען רופט אים פארשיידנזייטיגער דרייעק.

די ווינקלען פון א גלייכאקסלדיגן דרייעק. ווי מיר האבן געזעהען ביים אויסקנייטשן א ראָמב, זיינען די ווינקלען ביים גרונט פון א גלייכאקסלדיגן דרייעק גלייך איינער דעם אנדערן, און יעדער פון זיי איז א העלפט פון דעם ווינקל פונם ראָמב. עס קען אויך באוויזן ווערן, אז יעדער דרייעק מיט צוויי גלייכע ווינקלען איז א גלייכאקסלדיגער. צעטייל דעם גרונט פון דעם דרייעק אויף העלפט. פיקסירנדיג דעם מיטן פון דעם גרונט, קנייטש איין דעם דרייעק אזוי, אז איין העלפט פונם גרונט זאל זיך ארויפקנייטשן אויף דער אנדערער העלפט; דעמאלט וועט איין עק פון גרונט מוזן באדעקן דעם צווייטן עק. אבער אזויווי די ווינקלען ביים גרונט זיינען גלייך, וועלן זיך די צוויי אנדערע זייטן פון דעם דרייעק מוזן דעקן, ד. ה. זיי זיינען גלייך.

איינניטונגען.

1. באווייז, אז די גראָדע, וואס פארבינדט דעם גרונט פון א גלייכאקסלדיגן דרייעק מיט דעם שפיץ פון דעם דרייעק, איז פערפענדיקולאר צום גרונט.

2. באווייז, אז די ווינקלען, וואס ווערן געבילדעט צווישן דעם גרונט פון א גלייכאקסלדיגן דרייעק און די פארלענגערונגען פון די אקסלען, זיינען גלייך.

3. באווייז אויף דער פיגור 46, אז ADC איז א גלייכאקסלדיגער דרייעק.

4. ווען דאס פאפיר איז אזוי איינגעקנייטשט, אז די פינטלעך B און M פאלן צונויף מיט די פינטלעך C און N, און BM און CN שניידן זיך אין A, דעמאלט ליגט A אויף דעם קנייטש, און ABC איז א גלייכאקסלדיגער דרייעק. באווייז דאס!

באווייז אויך, אז ווען CM און BN שניידן זיך אין O, ליגט O אויף דעם קנייטש, און BOC איז א גלייכאקסלדיגער דרייעק.

5. קנייטש אויס א גלייכאקסלדיגן דרייעק ABC. צעטייל אויף העלפט AB אין N און AC אין M, קנייטש אויס BM און CN, וואס שניידן זיך אין O, און באווייז, אז AO איז דער מיטלסטער פערפענדיקולאר צו BC.

דער שטח פון א דרייעק. א דרייעק צעטיילט דעם פליין אויף צוויי טיילן, וואס איינער פון זיי (דער געשטריכלטער אויף דער פיג. 67) ענדערט זיך ניט מיט דער פארגרעסערונג פון דעם שטיק פליין, אויף וועלכן ער ליגט. אטדער טייל איז איינגעשלאָסן אין דעם דרייעק: ער איז דער שטח פון דעם דרייעק; די ליניע פון דעם דרייעק איז זיין ראַם; יעדער פינטל זיינער, וואס ליגט ניט אויף דער ראַם, ליגט אינווייניג אין דעם דרייעק; יעדער פינטל אויף דעם אנדערן טייל פון דעם פליין ליגט דרויסן פון דעם דרייעק.

אויף דער פיגור 46 דעקן זיך די גלייכאקסלדיגע דרייעקן ABD און CBD, ווען מען קנייטשט איין דאס פאפיר פאזע BD: אי די ראַמען דעקן זיך, אי די שטח׳ס דעקן זיך. די דרייעקן, הייסט עס, זיינען קאנגרועט. אזוי-ווי די שטח׳ס פוןביידע דרייעקן צוזאמען מאכן אויס דעם שטח פון א ראָמב, איז יעדער איינצלנער פון זיי גלייך א העלפט פון דעם שטח פון א ראָמב.

איינניטונגען.

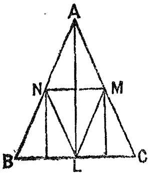
1. ווייז, וויאזוי מען צייכנט אדער וויאזוי מען קנייטשט אויס א גלייכאקסל-דיגן דרייעק, ווען זיינע אקסלען און דער ווינקל, דער איינגעשלאסענער צווישן זיי, זיינען געגעבן.

2. ווייז, וויאזוי מען צייכנט אדער מען קנייטשט אויס א גלייכאקסל-דיגן דרייעק, ווען זיינע אקסלען און די ווינקלען ביים גרונט זיינען געגעבן.

די ווינקלען פון א גלייכאקסלדיגן דרייעק. דערמאָן זיך, אז דו האסט געקענט באווייזן דורך קנייטשן, אז די צוויי ווינקלען פון א

7*

ראָמב, וואס ליגן ביי איין זייט, זיינען דערגאַנצנדיגע ווינקלען. דערפון איז געדרונגען, אז אלע דריי ווינקלען פון א גלייכאקסלדיגן דרייעק מאכן צוזאמען אויס צוויי גראָדע ווינקלען, ווארום די סומע פון די ווינקלען ביים גרונט איז גלייך איינעם א ווינקל פון דעם ראָמב, און דער ווינקל ביים שפיץ איז גלייך דעם צווייטן דערגאַנצנדיגן ווינקל פון דעם ראָמב.



פיג. 68.

דו קענסט אבער דעם זאַך באווייזן אהן דעם ראָמב. קנייטש אויס א גלייכאקסלדיגן דרייעק ABC (פיג. 68), צעטייל BC אויף העלפט אין L, קנייטש איין דעם דרייעק אזוי, אז A זאל פאלן אויף L, קנייטש איין דעם עק B אזוי, אז B זאל פאלן אויף L, דעמאלט וועט NB באדעקן NL און דער ווינקל ביי B וועט באדעקן דעם ווינקל NLB; אויפן זעלביגן שטייגער קענסטו באדעקן דעם ווינקל MLC מיט דעם ווינקל ביי C, אזוי אז אלע דריי ווינקלען פון דעם דרייעק באדעקן די צוויי גראָדע ווינקלען ביי L, ד. ה. צוזאמען מאכן זיי אויס 2 גראָדע.

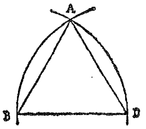
איינגיטונג.

צייכן אויף אדער קנייטש אויס א גלייכאקסלדיגן דרייעק, ווען עס איז געגעבן די לענג פון דעם גרונט און דער ווינקל ביים שפיץ.

גלייכזייטיגע דרייעקן.

§ 20. קאנסטרוקציע פון א גלייכזייטיגן דרייעק.

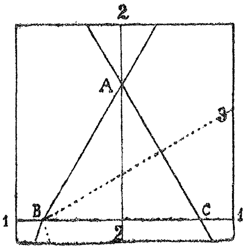
ווען די ראדיוסן פון די רעדער אויף דער פיגור 46 זיינען ביידע גלייך BD, איז ABD א גלייכזייטיגער דרייעק. דאס איז דער בעסטער שטייגער צו צייכענען גלייכזייטיגע דרייעקן (פיג. 69).



פיג. 69.

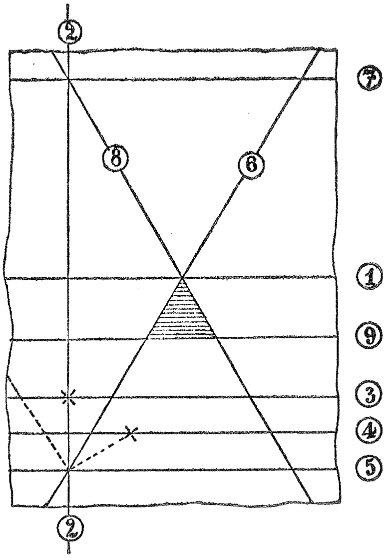
אויסקנייטשן א גלייכזייטיגן דרייעק. מאך וואס פאר ניט איז קנייטשן (1) און נעם אויף אים צוויי פינטלעך B און C, אזוי אז BC זאל האבן א געגעבענע לענג. קנייטש אויס דער מיטלסטן פערפענדיקולאר (2) צו BC. גלעט אויס דעם קנייטש (2), לאזנדיג דעם קנייטש (1); פיקסירנדיג B, קנייטש איין דאס פאפיר אזוי,

אז C זאל פאלן אויף דעם פערפענדיקולאר (2); דעם נייעם קנייטש באַ־צייכן מיט (3), און דעם פינטל אויף (2), וואס דעקט זיך מיט C, רופֿ אן A. לאזנדיג דעם קנייטש (3), קנייטש איין דאס פאפיר פון דער אנדערער זייט פאזע דעם אריבערגע־קנייטשטן טייל פון (1), ד. ה. מאך דעם קנייטש AB; גלעט אויס דאס פאפיר און קנייטש אויס AC פערפענדיקולאר צו (3). ABC איז דער פאר־לאנגטער גלייכזייטיגער דרייעק.



פיג. 70.

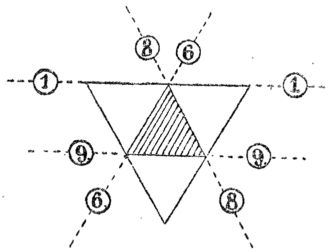
עס וועט זיין ניצליך פאר דיר, ווען דו וועסט זיך אויסקנייטשן א גלייכזייטיגן דרייעק אויף אן אנדער שטייגער (פיג. 71) אזוי, אז אין דעם דרייעק זאל ניט ליגן אזא קנייטש, ווי אויף פיגור 70 (דער קנייטש 3). די קאנסטרוקציע גייט ארויס פון דעם פאקט, אז אלע ווינקלען פון א גלייכזייטיגן דרייעק זיינען גלייך (ווייל ער איז פון אלע זייטן א גלייכאקסלדיגער), און אז אלע גלייכזייטיגע דרייעקן האבן די־זעלביגע ווינקלען, ווארום יעדער ווינקל פון א גלייכזייטיגן דריי־עק איז שטענדיג גלייך $^2/_3$ פון א גראַדן ווינקל (60°), מחמת מיר ווייסן דאך, אז אין א גלייכ־אקסלדיגן דרייעק באטרעפן אלע דריי ווינקלען צוזאמען 2 גראַדע ווינקלען.



פיג. 71.

קנייטש אויס די פיגור 71. די גראַדע (2) שטייט פער־פענדיקולאר צו (1); די גראַדע (3), (4), (5), (7) און (9) זיינען פערפענדיקולאר צו (2). דער אפשטאנד צווישן (3) און (4) איז אויסגעקליבן לויט געלוסט; דער אפשטאנד צווישן (4) און (5) איז גלייך דעם אפשטאנד צווישן (3) און (4). [אלע דריי ליניעס זיינען

אויסגעקנייטשט נאהנט צום ברעג· ווייל זיי דינען נאר· אויף צו געפינען דעם ווינקל פון דעם דרייעק]· די ליניע (6) ווערט אויסגעקנייטשט· ווען מען לייגט ארויף דעם שניטפינטל צווישן (2) און (3) – צלמ׳ל – אויף (4)· האלטנדיג דאס פאפיר איינגעקנייטשט אין (1)· קנייטשט מען אויס (7) פאזע (5)· דעם שניטפינטל צווישן (7) און (2) פארבינדט מען מיט דעם שניטפינטל צווישן (6) און (1)· דעמאלט באקומט מען דעם קנייטש (8)· די ליניעס (6) און (8) בילדן דעם ווינקל פון א גלייכזייטיגן דרייעק· און יעדע גראַדע· וואס איז פערפענדיקולאר צו (2) בילדעט מיט זיי א גלייכ־זייטיגן דרייעק· די קאנסטרוקציע איז זעהר ניצליך· ווען מען דארף באַ־דעקן דאס פאפיר מיט א נעץ פון גלייכזייטיגע דרייעקן· ווען דו האסט אויסגעקנייטשט איין גלייכזייטיגן דרייעק צווישן די ליניעס (1) און (9)· קענסטו איצט אויסקנייטשן א גאנצן פּאַס פון אזעלכע דרייעקן· האלטנדיג דאס פאפיר איינגעקנייטשט אין (9)· לייג ארויף דעם ראנד אויף (6)· באקומסטו א צווייטן גלייכזייטיגן דרייעק· וואס האט איין זייט בשותפות מיט דעם ערשטן דרייעק און ליגט רעכטס פון אים; ארויפלייגנדיג דעמ־זעלביגן ראַנד (9) אויף (8)· באקומסטו ניט בלויז נאך אזא דרייעק לינקס· נייערט אויך נאך איינעם אונטער דעם ערשטן דרייעק· געבילדעט דורך דעם קנייטש (9) און ביידע נייע קנייטשן· אלע פיר דרייעקן צוזאמען בילדן איין גרויסן גלייכזייטיגן דרייעק· וואס איז צעטיילט אויף פיר קליינע (פיג· 72)·



פיג· 72·

קנייטשנדיג אויף דעמזעלביגן שטייגער ווייטער· קענען מיר בילדן א גאנצן פּאַס פון אזעלכער דרייעקן· כסדר טיילנדיג אויף העלפט דעם ווינקל צווישן איין זייט פון א שוין פאראהאנענעם דרייעק און צווישן דער פארלענגערונג פון א צווייטער זייט זיינער· אזוי קענען מיר באדעקן יעדעס שטיק פון א פליין מיט א נעץ פון דרייעקן·

איינניטונגען·

באוויז דורך קנייטשן פאלגנדיגע זאַצן:

1· די ווינקלען פון א גלייכזייטיגן דרייעק זיינען אלע גלייך· און יעדער פון זיי איז גלייך צווידריטל פון א גראַדן ווינקל·

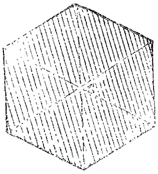
2. די גראָדע, וואס פארבינדט דעם מיטן פון א זייט פון א גלייכזייטיגן דרייעק מיט איר אנטקעגנדיגן עק, איז פערפענדיקולאר צו דער זייט און טיילט דעם ווינקל ביים שפיץ אויף העלפט (יעדע זייט פון א גלייכזייטיגן דרייעק קען אנגענומען ווערן פארן גרונט פון דעם דרייעק, און איר אנט־קעגנדיגער עק פארן שפיץ פון דעם דרייעק).

3. די פארבינדנדיגע ליניעס צווישן יעדן עק פון א גלייכזייטיגן דרייעק און דעם מיטן פון זיין אנטקעגנדיגער זייט שניידן זיך אין איין פינטל; דער ראד, וואס זיין צענטער ליגט אין אטדעם פינטל און וואס גייט אַדורך דורך איינעם פון די עקן, גייט אויך אַדורך דורך ביידע אנדערע עקן (כדי דאס צו באווייזן, נעם די מיטנס L, M, N פון BC, CA, AB און קנייטש אויס AL און BM, וואס שניידן זיך אין O, ווי דו זעהסט דאָס, אויסגלעטנדיג דעם דרייעק. ווען מיר וועלן איצט ווידער קנייטשן פאזע AL, וועט זיך B ארויפלייגן אויף C, און M אויף N, און O בלייבט אויף זיין ארט, דעריבער איז OM קאנגרועגט צו ON. OB, וואס איז איצט די פארלענגערונג פון ON, גייט דורך C).

רעגולערע זעקסעקן.

§ 21. קאנסטרוקציע פון א רעגולערן זעקסעק.

ווען מיר וועלן קאנסטרואירן דריי גלייכזייטיגע דרייעקן צווישן (1) און (9) אויף פיגור 71, ווי מיר האבן דאס פריהער געטאן, און איינקנייטשן דאס פאפיר פאזע (1), און פאזע (9) איינקנייטשן דאס אויבערשטע בלעטל פאפיר, וועלן מיר באקומען א נייעם גלייכזייטיגן דרייעק. ווען מיר וועלן פארבינדן די עקן פון דעם לעצטן דרייעק מיט די פינטלעך, וואס ליגן אויף (1), וועלן מיר באקומען נאך צוויי גלייכזייטיגע דרייעקן. צוזאמען וועלן מיר באקומען זעקס גלייכזייטיגע דרייעקן, וואס זיינען גרו־פירט ארום זייער בשותפותדיגן עק A אויף (1), און וואס פארנעמען א שטיק פליין, וואס איז אויף דער


פיג. 73.

פיגור 73 געשטריכלט. דאס שטיק פליין איז אפגעגרעניצט פון דעם איבעריגן פליין דורך די זעקס זייטן פון די דרייעקן, וואס ליגן אנטקעגן דעם בשותפותדיגן עק A. זיי בילדן א רעגולערן זעקסעק, דער געשטריכלטער טייל פון פליין הייסט דער שטח פון דעם זעקסעק, און די געצאקטע ליניע, וואס שליסט איין דעם שטח, הייסט די ראַם פון

דעם זעקסעק· די ווינקלען פון דעם זעקסעק זיינען די ווינקלען צווישן די שכנישע זייטן זיינע, און יעדער ווינקל איז אין צוויי מאל גרעסער ווי א ווינקל פון א גלייכזייטיגן דרייעק, ווי דו קענסט דאס אויפן ערשטן בליק דערזעהען· די זעקס שפיצן פון די ווינקלען הייסן די עקן פון דעם זעקסעק·

איינניטונגען.

1· ווייז, אז דורך די זעקס עקן פון א רעגולערן זעקסעק קען מען באשרייבן א ראד (א ארומגעשריבענער ראד)·

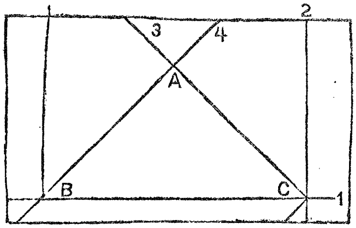
2· שרייב אריין א רעגולערן זעקסעק אין א געגעבענעם ראד·

3· צו יענע זייטן פון די זעקס דרייעקן פון דעם רעגולערן זעקסעק, וואס זיינען נ־ט די זייטן פון דעם זעקסעק, קנייטש אויס אדער צייכן אויף פערפענדיקולארן אין די עקן פון דעם זעקסעק. באווייז, אז דו האָסט באקומען א נייעם רעגולערן זעקסעק. דער ערשטער זעקסעק און זיין ארומגעשריבענער ראד זיינען ביידע אריינגעשריבן אין דעם נייעם זעקסעק (פגל· פיג· 56)· דער רינג פון דעם ראד ליגט צווישן די ראמען פון ביידע זעקסעקן, דער נייער זעקסעק איז אריינגעשריבן אין דעם ראד·

§ 22. גראָדווינקלדיגע גלייכאקסלדיגע דרייעקן·

ווען דער ראָמב אויף פיגור 46 וואלט געווען א קוואדראט, וואלט דער גלייכאקסלדיגער דרייעק ABD געהאט א גראָדן ווינקל ביי A, און יעדער ווינקל ביים גרונט וואלט געווען א העלפט פון א גראָדן. אזא דרייעק הייסט א גראָדווינקלדיגער גלייכאקסלדיגער דרייעק, אדער א גלייכאקסל־דיגער גראָדווינקלדיגער דרייעק·

אויסקנייטשן א גראָד־ווינקלדיגן גלייכאקסלדיגן דרייעק מיט א געגעבענעם גרונט (פיג· 74)· קנייטש אויס דעם פערפענדיקולאר (2) צום גרונט BD אין איינעם פון זיינע עקן. צעטייל אויף העלפט דעם ווינקל צווישן אטדעם פערפענדיקולאר און דעם גרונט, ארויפלייגנדיג דעם פערפענדיקולאר אויף דעם גרונט און מאכנדיג דעם קנייטש (3)· קנייטש אויס (4) פערפענדיקולאר צו (3) דורך B·



פיג· 74·

דער קנייטש (4) שניידט דעם קנייטש (3) אין דעם שפּיץ A פון דעם פּאַר־לאַנגטן דרייעק·

אײַנניטונגען.

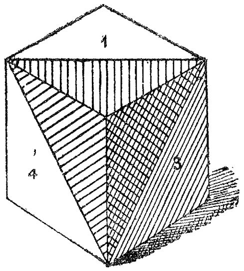
1· באַווייז, אַז, פֿאַרבינדנדיג דעם שפּיץ פֿון אַ גראַדווינקלדיגן גלײַכ־אַקסלדיגן דרייעק מיט דעם מיטן פֿון דעם גרונט, צעטיילסטו דעם דרייעק אויף צוויי קאָנגרוענטע גראַדווינקלדיגע גלייכאַקסלדיגע דרייעקן·

2· צייכן אויף אַ גראַדווינקלדיגן גלייכאַקסלדיגן דרייעק מיט אַ געגעבענעם גרונט·

דער טעטראעדער·

§ 23. אָפּשניידן אַ טעטראעדר פֿון דעם עק פֿון אַ קוב·

נעם דיין מאָדעל פון אַ קוב און ווייז, וויאַזוי דו קענסט באַקומען אַ גראַדווינקלדיגן גלייכאַקסלדיגן דרייעק, וואָס זיינע אַקסלען זאָלן זיין קאַנטן פון דעם קוב· זאָל דער גרונט פון דעם דרייעק זיין דער דיאַגאָנאַל פון דער ווענטל (1), און דער שפּיץ פון דעם דרייעק זאָל זיין דער עק (1, 3, 4)· צי איז פֿאַרהאַן אויף דעם אויבער־פלאַך פון דעם קוב נאָך אַ גראַדווינקלדיגער גלייכאַקסלדיגער דרייעק מיט דעמזעלביגן שפּיץ? עס זיינען פֿאַרהאַן נאָך צוויי אַזעלכע דרייעקן, אויף יעדערער פון די ווענטלעך, וואָס שניידן זיך אין דעם פּינטל (1, 3, 4), ווי דו זעהסט אויף דער פיגור 75·



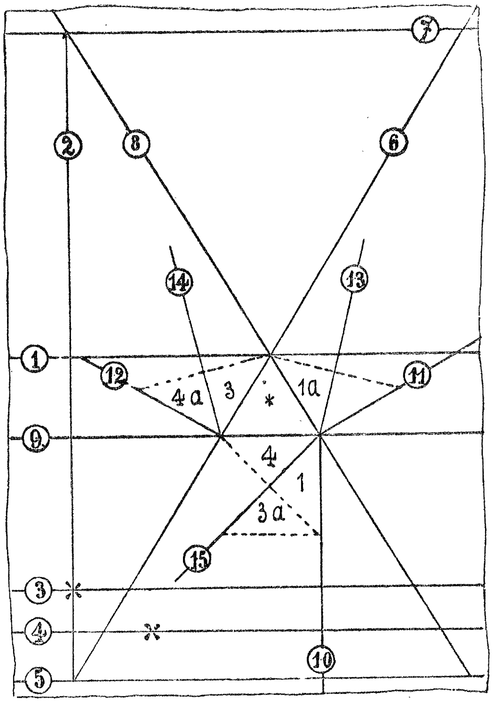
פיג· 75·

וואָס קענסטו זאָגן וועגן דעד לאַגע פון די גרונטן פון די דריי דרייעקן? זיי ליגן אַלע אויף איין פלײַן, ווארום יעדער גרונט שניידט ביידע אַנדערע; זיי זיינען גלייך, ווארום יעדער איז אַ דיאַגאָנאַל פון אַ ווענטל פון דעם קוב· זיי בילדן, הייסט עס, אַ גלייכזייטיגן דרייעק·

אַזוי ווי אַלע דריי גרונטן ליגן אויף איין פלײַן, קענען מיר דורכשניידן דעם קוב אין אַטדעם פלײַן, און דערמיט שניידן מיר אָפּ דעם עק· וואָס פאַר אַ קערפּער האָבן מיר באַקומען? פּראָביר דאָס צו ווייזן אויף אַ זייפענעם קוב· האָסטו שוין פריהער געזעהען אַזאַ קערפּער, ווי דער אָפּגעשניטענער עק? דאָס איז אַ נייער קערפּער· וויפיל עקן האָט ער? 4 עקן· אַזאַ

קערפּער הייסט טעטראעדער (טעטרא הייסט אויף גריכיש פיר). א טעטרא־עדער, וואס שטאמט פון דעם עק פון א קוב, הייסט אַ קובישער טעטראעדער.

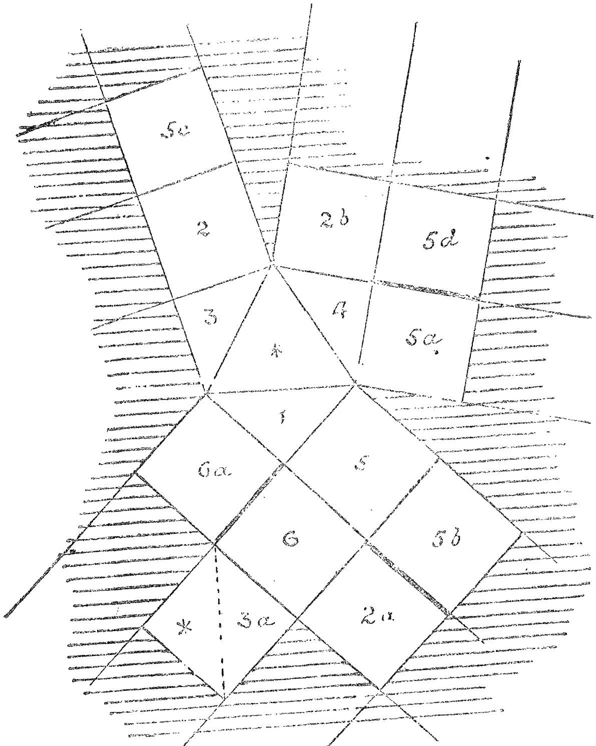
גרייט צו א מאָדעל פון א קובישן טעטראעדער און א מאָדעל פון דעם קערפּער, וואס בלייבט איבער פון דעם קוב, ווען מען שניידט פון אים אָפּ דעם טעטראעדער. אויף דער פיגור 76 האסטו א צושניט פון דעם ערשטן, אויף דער פיגור 77 א צושניט פוןביידע.



פיג. 76.

מאָדעל פון א קובישן טעטראעדר. די ליניעס (1) און (9) אויף דער פיגור 76 זיינען דיזעלביגע, ווי אויף פיגור 71, און זיי דינען פאַר דער קאָנסטרוקציע פון דעם גלייכזייטיגן דרייעק. אויף זיינע זייטן קאָנסטרו־אירט מען גראָדווינקלדיגע גלייכאקסלדיגע דרייעקן, לויט פיגור 74. די

ליניעס (13), (14) און (15), ווי אויך די פונקטירטע ליניעס, קנייטשט מען אמבעסטן אויס. נאכדעם ווי מען האט אויסגעשניטן דעם מאָדעל פאזע די ליניעס (10), (11), (1), (12), (6), (3). עס איז גלייכער אויסצושניידן צוויי טעטראעדערס פאַראַמאַל, אויסקנייטשנדיג דעם מאָדעל סימעטריש אויףביידע



פיג. 77.

זייטן פון (1); דאס רוב ליניעס דינען פאַר ביידע מאָדעלן. אינגאנצן וועלן מיר האבן נויטיג 4 טעטראעדערס. פיגור 84 ווייזט דעם פארטיגן מאָדעל. ער האט:

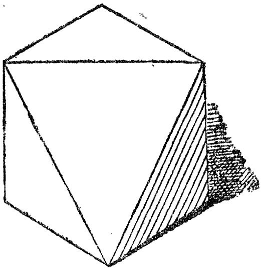
עקן	4	קאַנטן	6
ווענטלעך	4		2
	8		8

מיר זעהען פונסניי, אז די סומע פון די עקן און די ווענטלעך איז אויף 2 גרעסער, ווי די צאָל פון די קאַנטן.

א קוב מיט א אָפּגעשניטענעם עק. לאָמיר זעהן, צי האַלט אויס דער כלל ביי א קוב מיט א אָפּגעשניטענעם עק, ד. ה. ביי א קוב, פון וועלכן מיר האָבן אָפּגעשניטן א קובישן טעטראַעדער. פון דעם קוב איז איצט געוואָרן א אומרעגולערע פיגור מיט דריי קוואַדראַטישע ווענטלעך און פיר דרייעקיגע ווענטלעך, וואס דריי פון זיי זיינען גראַדווינקל־דיגע גלייכאַקסלדיגע דרייעקן, און די פערטע איז א גלייכזייטיגער דרייעק.

פיגור 77 ווייזט, וויאַזוי מען גרייט צו אזא מאָדעל. אָפריהער ווערט אויסגעקנייטשט דער גלייכזייטיגער דרייעק, לויט פיגור 71, דערנאָך די גראַדווינקלדיגע דרייעקן, לויט פיגור 74, און דערנאָך די קוואַדראַטן, ווי געוואוינליך.

פיגור 78 ווייזט דעם פאַרטיגן מאָדעל; ער האָט:



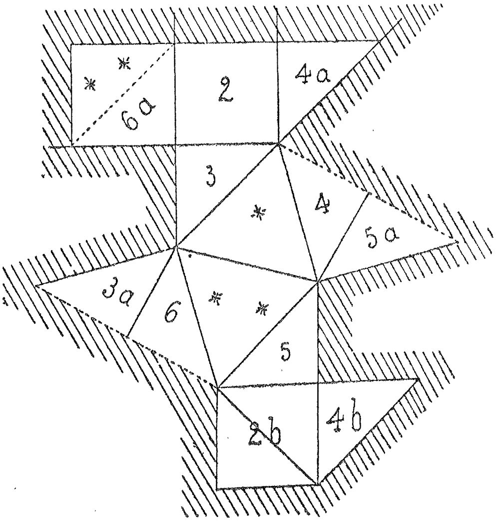
פיג. 78.

עקן	7	קאַנטן	12
ווענטלעך	7		2
	14		14

דאס שיפעלע. זעה נאָר, ווי אומרעגולער עס זעהט אויס אזא מאָדעל פון א קוב מיט א אָפּגעשניטענעם עק. ער וואָלט אויסגעזעהען שענער, ווען מיר וואָלטן אָפּגעשניטן דעם עק (1,5,6) אויכעט. וואס וואָלטן מיר באַקומען? א קערפּער מיט א שאַרפן ראַנד פאַזע דעם דיאַגאָנאַל פון דער ווענטל (1), דורך וועלכן מיר האָבן געפירט דעם שניט. דער קערפּער שטייט אויף דער קוואַדראַטישער ווענטל (2). אלע אַנדערע ווענטלעך זיינען לויטער דרייעקן: פיר גראַדווינקלדיגע גלייכאַקסלדיגע און צוויי גלייכ־זייטיגע דרייעקן. פיגור 79[1]) ווייזט דעם צושניט פאַר דעם מאָדעל פון אונזער נייעם קערפּער, פיגור 80 דעם פאַרטיגן מאָדעל מיט דעם שאַרפן ראַנד אַראָפּ. ער זעהט אויס כמעט ווי א שיף, דעריבער רופן מיר אים אָן דאס שיפעלע. ער האָט:

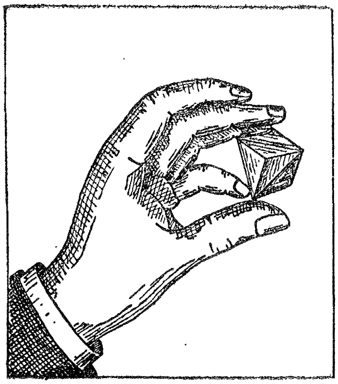
[1]) דער גלייכזייטיגער דרייעק מיט צוויי צלמלעך ווערט אויסגעקנייטשט מיט דער הילף פון דעם גלייכזייטיגן דרייעק מיט איין צלמל: מען קנייטשט איין זייער בשותפותדיגע זייט און קנייטשט אויס די זייטן פון דעם צווייטן דרייעק פאַזע די זייטן פון דעם ערשטן.

עקן	6	קאַנטן	11
ווענטלעך	7		2
	13		13



פיג· 79·

ווען דו וועסט נעמען 2 קובישע טעטראעדערס און וועסט זיי ארויפלייגן מיט זייערע גלייכזייטיגע ווענטלעך אויף די גלייכזייטיגע ווענטלעך פון דעם שיפעלע· וועסטו באקומען איבער־אנייס דעם קוב·

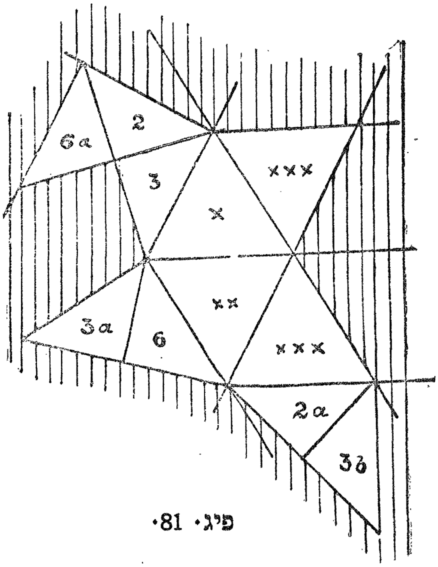


פיג· 80·

דער טאפעלער טעטראעדער·

לאמיר אפשניידן א דריטן טעטראעדער פון אונזער קוב· דהיינו פון דעם עק (2, 4, 5)· וואס בלייבט פון דעם קוב? אינאנהייב וועסטו די פיגור האלטן פאַר זעהר אומרעגולער· דו וועסט אבער באלד איינזעהען· אז דאס איז ניט אזוי·

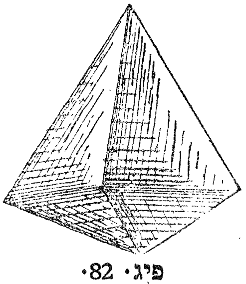
פיגור 81 ווייזט דעם צושניט און פיגור 82 דעם פארטיגן מאָדעל. ווען דו וועסט אוועקשטעלן דיין מאָדעל, ווי אויף דער פיגור 80, מיט דעם עק (2, 3, 6) אַראָפּ און מיט דעם עק, אין וועלכן עס שניידן זיך די דריי גלייכזייטיגע ווענטלעך, ארויף, וועסטו זעהען, אז ער איז דווקא ניט אומרעגולער, ווי דיר האט זיך אינאנהייב אויסגעוויזן. ער האט:



פיג. 81.

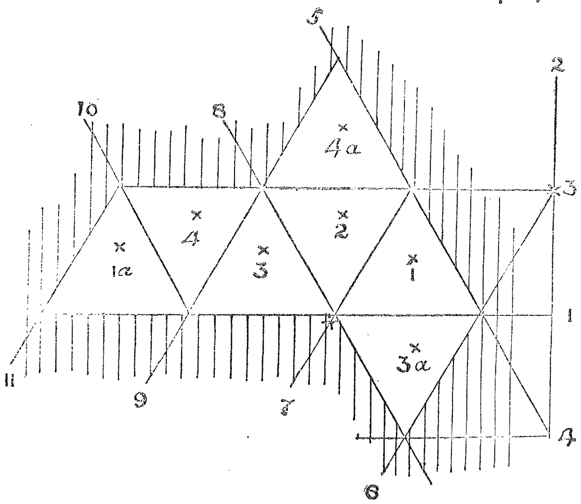
עקן	5	קאַנטן	9
ווענטלעך	6		2
	11		11

די דריי אויבערשטע ווענטלעך זיינען גלייכזייטיגע דריי־עקן, די דריי אונטערשטע ווענטלעך זיינען גראָדווינקל־דיגע גלייכאקסלדיגע דרייעקן פון דעם לעצטן עק פונם קובי. זיי גיבן אונז דעם גלייכזייטיגן גרונט פון דעם לעצטן קובישן טעטראעדער מיט די דריי קאַנטן, וואס שניידן זיך ניט ניט אין דעם אויבערשטן עק און ניט אין דעם אונטערשטן עק און בילדן א פערטן גלייכזייטיגן דרייעק, וואס שניידט יעדן פון די אנדערע דרייעקן אין א קאַנט. אטדי פיר גלייכ־זייטיגע דרייעקן בילדן אויך א טעטראעדער, אבער ער איז ניט גלייך דעם קובישן טעטראעדער, מחמת אלע ווענטלעך זיינע זיינען גלייכזייטיגע. אויף אזא אופן איז אונזער מאָדעל א טאפעלער טעטראעדער. ביידע טעטראעדערס זיינע זיינען פארבונדן איינער מיט דעם אנדערן מיט זייער גרונט, ד. ה. זיי האבן א בשותפותדיגן גרונט.


פיג. 82.

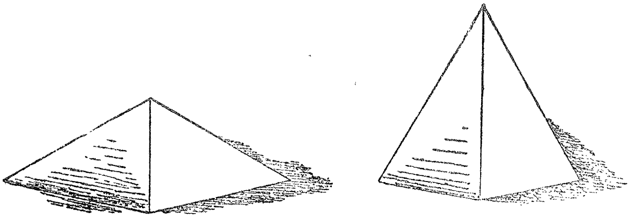
דער רעגולערער טעטראעדער. ווען מיר וועלן פון דעם טאפעלן טעטראעדער אפשניידן דעם לעצטן קובישן טעטדאעדער פון אונזער קובי·

בלײַבט בײַ אונז דער צװײטער טעטראעדר פון דעם טאפּעלן· <u>ער הײסט רעגולערער טעטראעדר</u>· פיגור 83 װײַזט דעם צושניט פון אים, פיגור 84 דעם פאַרטיגן מאָדעל·



פיג· 83·

אויף דער פיגור 83 זײַנען געגעבן די ליניעס פאַר דער קאָנסטרוקציע· די ליניעס (5) און (6) װערן אױסגעקנײטשט אױף דעם שטײגער פון דער

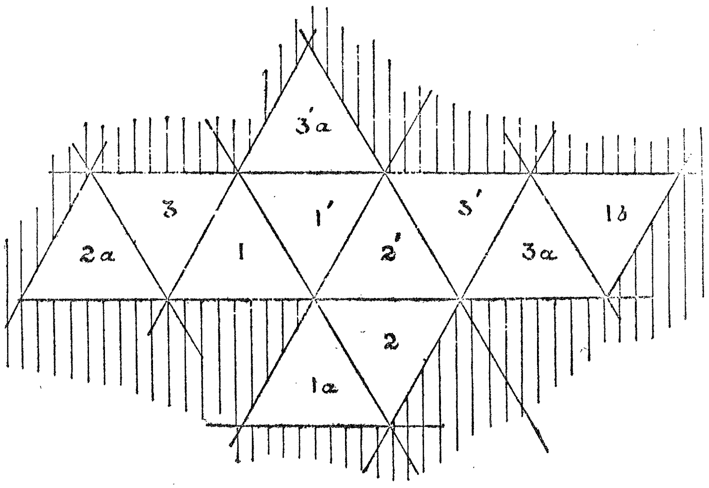


פיג· 84·

פיגור 71· אַלע איבעריגע ליניעס קאָנסטרואירט מען אַמבעסטן, אַלס ביסעקטאָרן פון די װינקלען צװישן פאַראַנענע ליניעס און צװישן דער ליניע (1) אָדער (3); אַזױ קאָנסטרואירט מען די ליניע (7), אײַנקנײטשנ-

דיג (3) און ארויפלייגנדיג (3) אויף (5). די ווענטלעך פון דעם רעגולערן טעטראעדער זיינען באצייכנט מיט *1, *2, *3 און *4. די צלמלעך ווייזן, אז די ווענטלעך זיינען שניטן דורך דעם קוב, ד. ה. אז זיי זיינען געשאפן געווארן דורך שניטן דורך דעם אינווייניגסטן רוים פון דעם קוב (זיי מוזן באפארבט ווערן בלוי).

פיגור 84 ווייזט א קובישן טעטראעדער און א רעגולערן טעטראעדער. דער רעגולערער טעטראעדער איז גרעסער ווי דער אנדערער און האט א

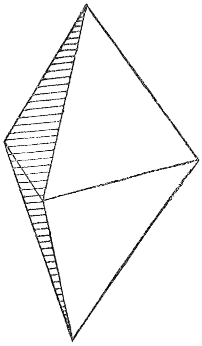


פיג. 85.

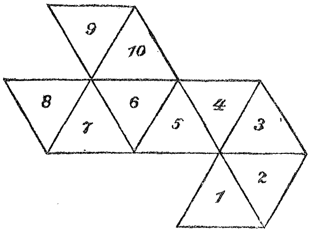
שארפערן שפיץ. ווען מען וויל איבעראנייס צונויפלייגן אונזער קוב, דארף מען בלויז צולייגן יעדן קובישן טעטראעדער מיט זיין גלייכזייטיגער ווענטל צו איינער א ווענטל פון דעם רעגולערן טעטראעדער.

פון אלע קערפער, וואס מיר האבן באקומען דורך שניטן דורך דעם קוב, האט דער רעגולערער טעטראעדער קאנגרוענטע ווענטלעך. דו זעהסט אויך, אז אין יעדן עק שניידט זיך דיזעלביגע צאל ווענטלעך אויף א גלייכן שטייגער. דעריבער טאקע רופט מען א טעטראעדער מיט פיר קאנגרוענטע גלייכזייטיגע ווענטלעך רעגולער; צוליב דעמזעלביגן טעם רופט מען אויך א קוב א רעגולערע פיגור.

דער טאפעלער רעגולערער טעטראעדער. ניט יעדער קערפער, וואס זיינע ווענטלעך זיינען קאנגרועונט, איז א רעגולערער קערפער. דו קענסט לייכט קאנסטרואירן אזא קערפער: א טאפעלער רעגולערער

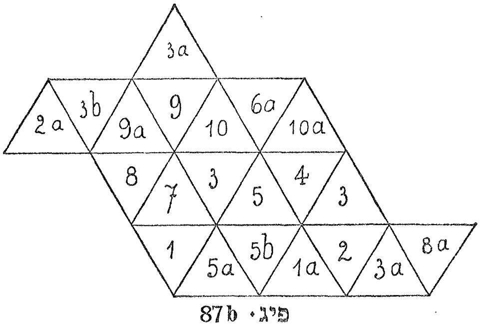


פיג. 86.



פיג. 87a.

טעטראעדער, וואס באשטייט פון צוויי רעגולערע טעטראעדערס, איז אזא קערפער. דו קענסט קאנסטרואירן אזא מאָדעל, אויסקנייטשנדיג גלייכזייטיגע דרייעקן, ווי אויף פיגור 81, אויסשניידנדיג זיי און פארהעפטנדיג זיי. דער צושניט דערצו איז געגעבן אויף דער פיגור 85, און דער



פיג. 87b

פארטיגער מאָדעל אויף פיגור 86. צוויי עקן פון דעם מאָדעל זיינען, ווי דו זעהסט, שפיציגער, ווי די אנדערע דריי. אין די שפיציגע עקן שניידן זיך בלויז דריי ווענטלעך, אין די ברייטע עקן שניידן זיך פיר ווענטלעך. דער קערפער, א טאפעלער רעגולערער טעטראעדער, איז ניט קיין רעגולערע פיגור.

איינניטונג.

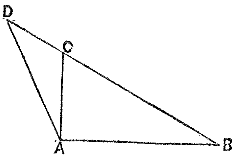
פארהעפט 5 רעגולערע טעטראעדרס, וואס זאלן צוזאמען בילדן א קערפער, וואס, הגם אלע זייגע ווענטלעך זיינען קאנגרוענט, איז ער ניט קיין רעגולערער. קנייטש אויס דעם מאָדעל פון אזא קערפער. צייל זייגע עקן, ווענטלעך און קאַנטן. אזא קערפער הייסט בימבאָס ראָמב (דעם נעץ פון דעם קערפער זעהסטו אויף דער פיגור 87a, דעם צושניט אויף דער פיגור 87b).

דער דרייעק.

§ 24. גראָדווינקלדיגע, ברייטווינקלדיגע און שמאל-ווינקלדיגע דרייעקן.

מיר האבן שוין ארומגערעדט די גלייכאקסלדיגע און די גלייכזייטיגע דרייעקן און מיר האבן געזעהען, אז ניט אלע דרייעקן זיינען גלייכאקסלדיגע אדער גלייכזייטיגע. א גראָדווינקלדיגער גלייכאקסלדיגער דרייעק איז, ווי מיר האבן געזעהען, די העלפט פון א קוואדראט; די העלפט פון א גראָדעק, וואס איז צעטיילט אויף העלפט דורך זיין דיאַגאָנאַל, איז אויך א גראָדווינקלדיגער דרייעק, אבער ניט קיין גלייכאקסלדיגער.

ווינקלען (אינווייניגסטע ווינקלען) פון א דרייעק זיינען די ווינקלען, וואס די זייטן פון א דרייעק בילדן איינע מיט דער אנדערער (פיג. 88). יעדער דרייעק מיט א גראָדען ווינקל הייסט א גראָדווינקלדיגער.



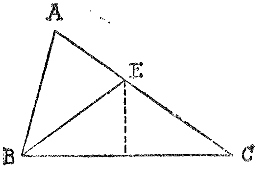
פיג. 88.

ווען ABC איז א גראָדווינקלדיגער דרייעק מיט א גראָדען ווינקל ביי A, נעמט מען געוואוינליך אן דעם עק A פארן שפיץ פון דעם דרייעק און די זייט BC, וואס ליגט אנטקעגן דעם גראָדען ווינקל, פאר דעם גרונט פון דעם דרייעק. פארלענגערן מיר דעם גרונט BC ביז צו א פינטל D און פארבינדן מיר D מיט A, באקומען מיר דעם דרייעק DAB, וואס זיין ווינקל ביי A איז גרעסער פון א גראָדען ווינקל, ד. ה. ער איז א ברייטער ווינקל. אזא דרייעק רופט מען א ברייטווינקלדיגן. א דרייעק, וואס

איז ניט קיין גראָדווינקלדיגער און ניט קיין ברייטווינקלדיגער, הייסט א שמאָלווינקלדיגער. מיט אנדערע ווערטער: א דרייעק, וואס אלע ווינקלען זיינע זיינען שמאלע, הייסט א שמאלווינקלדיגער.

די ווינקלען פון א דרייעק. אויף דיינע פיגורן זעהסטו, אז הן אין גראָדווינקלדיגע דרייעקן והן אין ברייטווינקלדיגע דרייעקן זיינען פארהאן צוויי שמאלע ווינקלען. מוז דאס אזוי זיין? יע, עס מוז אזוי זיין; מיר וועלן דאס באלד באווייזן. דו דערמאנסט זיך דאָך נאָך דעם באווייז, אז יעדער ווינקל ביים גרוינט פון א גלייכאקסלדיגן דרייעק מוז זיין א שמאָלער ווינקל. דערפון קענסטו לייכט דרינגען, אז יעדער דרייעק מוז האבן לכל הפחות צוויי שמאלע ווינקלען.

ווארום לאמיר באטראכטן צוויי ווינקלען פון א דרייעק. זיינען זיי גלייך, מוזן זיי ביידע זיין שמאלע ווינקלען. איצט לאמיר זאגן, אז זיי זיינען ניט גלייך. זאל אין דעם דרייעק ABC דער ווינקל B זיין גרעסער ווי דער ווינקל C. לאמיר איינקנייטשן דעם דרייעק אזוי, אז C זאל פאלן אויף B. אזוי־ווי דער ווינקל C איז קלענער ווי דער ווינקל B, איז ער קאנגרועגט מיט א טייל פון B, דהיינו מיט דעם ווינקל EBC, וואס איין זייט זיינע איז BC און די אנדערע ליגט אינווייניג אין דעם דרייעק און שניידט AC אין E. אזוי ארום איז BEC א דרייעק מיט צוויי גלייכע ווינקלען EBC און ECB, און יעדער פון זיי מוז זיין, ווי מיר ווייסן, א שמאלער. מיר זעהען, אז פון יעדער פאָר ווינקלען פון א דרייעק מוז איינער זיין א שמאלער, דעריבער קען העכסטנס איין ווינקל זיין א גראדער אדער א ברייטער.

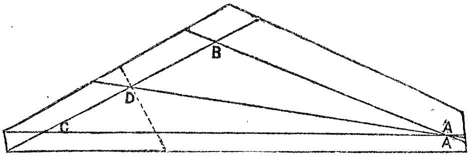


פיג׳ 89.

די סומע פון צוויי ווינקלען פון א דרייעק. עס איז קלאר, אז די סומע פון צוויי ווינקלען פון א דרייעק איז שטענדיג קלענער ווי צוויי גראדע ווינקלען, ווען דער דרייעק איז ניט קיין ברייטווינקלדיגער. אבער עס איז ניט אזוי קלאָר, אז אפילו, ווען דער דרייעק איז א ברייט־ווינקלדיגער, איז די סומע פון דעם ברייטן ווינקל מיט יעדן פון די שמאלע אויבעט קלענער פון צוויי גראדע ווינקלען. דאס קען מען אבער באווייזן.

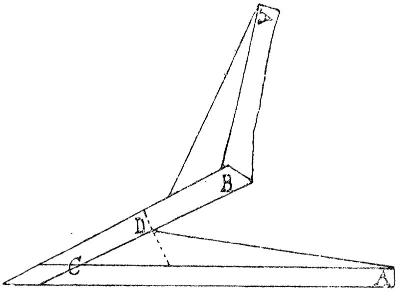
טעארעמע. די סומע פון צוויי ווינקלען פון א דרייעק איז קלענער ווי צוויי גראדע ווינקלען.

קנייטש אויס א ברייטווינקלדיגן דרייעק. קלייב אויס צוויי ווינקלען, וועגן וועלכע מיר דארפן באווייזן, אז זיי מאכן צוזאמען אויס קנאפער



פיג. 90.

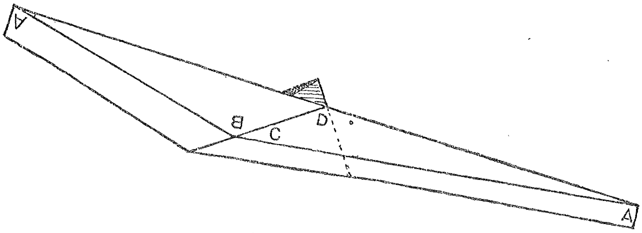
ווי צוויי גראָדע ווינקלען. אוודי וועסטו אויסקלייבן דעם ברייטן ווינקל און דעם גרעסערן פון די צוויי שמאָלע. פארקנייטש אויף הינטן דעם ראנד פונם פאפיר פאזע דער זייט BC, ביי וועלכער עס ליגן די צוויי אויסגעקליבענע ווינקלען B און C, און קנייטש אויס דעם מיטלסטן פערפענדיקולאר צו BC. זאל D זיין דער מיטן פון BC. מאך א קנייטש צווישן D און דעם דריטן עק A פון דעם דרייעק. די ליניע פון דעם קנייטש בילדעט שכנישע ווינקלען מיט BC, אזוי אז בלויז איינער פון זיי קען זיין גרעסער ווי א גראָדער ווינקל. זאל ADC זיין דער ווינקל, וואָס איז גרעסער ווי א גראָדער ווינקל, און ADB דער ווינקל, דער קלענערער פון א גראָדן; ADC און ADB צוזאמען באטרעפן צוויי גראָדע ווינקלען.



פיג. 91.

איצט מאך א שפאלט אין דיין בלאט פאזע AD, דורכשניידנדיג דערביי אינגאנצן דעם ראנד פון דיין בלאט ביי A, אבער ניט דורכשניידנדיג דעם ראנד ביי D. האלטנדיג דיין בלאט פלאך אויף דעם טיש, איינגעקנייטשט אין BC, הייב אָפּ דער אויבערשטן דרייעק ADB און לייג אים אריבער מיט דער אונטערשטער זייט פון דעם בלאט אויף אויבן. דער טייל DB פון דעם קנייטש BC איז איצט אויסגעגלעט (פיג. 91). דער דרייעק ADB

ליגט נאָך אלץ אויף דערזעלביגער זייט פון דעם מיטלסטן פּערפּענדיקולאר (דהיינו רעכטס פון אים), אזוי ווי פריהער. איצט בייג אום דעם דרייעק ADB אויף לינקס ארום דעם מיטלסטן פּערפּענדיקולאר, אזוי אז די אויבערשטע זייט פונם בלאט זאל ווידער ליגן אויבן; דעמאלט ליגט DB פונקט אונטער DC, C אונטער B,ביידע רענדער פון דעם שפּאלט ליגן אויף איין גראָדער ליניע. דער ווינקל BDA איז צוגערוקט צו דעם ווינקל CDA, האבנדיג מיט אים די זייט DC בשותפות. אבער, אזויוי דער ווינקל BDA איז א דערגאנצנדיגער ווינקל פון CDA (זעה פיג. 90), מוז זיין זייט DA ליגן אויף איין גראָדער מיט דער זייט DA פון דעם ווינקל CDA. דעריבער בילדן די ליניעס AC, BA און DA א דרייעק (פיג. 92), און די ווינקלען ABD און ACD בילדן צוזאמען איינעם פון די ווינקלען פון



פיג. 92.

דעם דרייעק, דעריבער קען ער ניט זיין קיין אויסגעפּוקלטער, ד. ה. זייער סומע, אדער, מיט אנדערע ווערטער, די סומע פון די צוויי ווינקלען פון דעם דרייעק ABC איז קלענער פון צוויי גראָדע ווינקלען. און דאס האט געדארפט באַווייזן ווערן.

דיזעלביגע טעארעמע קען מען אויסדריקן אין א אנדער נוסח: ווען מען פארלענגערט א זייט פון א דרייעק, איז דער דרויסנדיגער ווינקל גרעסער ווי יעדער אינווייניגסטער ווינקל, וואס איז ניט זיין שכנישער ווינקל (ווייל זיין שכנישער ווינקל מאכט אויס צוזאמען מיט א אנדער אינווייניגסטן ווינקל קנאפּער פון צוויי גראָדע ווינקלען, אבער מיט דעם דרויסנדיגן ווינקל מאכט ער אויס פונקט 2 גראָדע ווינקלען).

איינגיטונג.

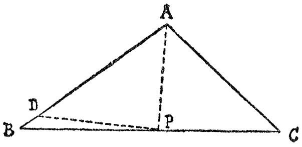
דער פּערפּענדיקולאר, וואס איז אראפּגעלאזן פון דעם עק A פון א דרייעק ABC צו דער אנטקעגנדיגער זייט BC, ליגט אדער אינווייניג אין

דעם דרייעק אדער דרויסן פון דעם דרייעק, ווענדט זיך אן דעם, צי זיינעןביידע ווינקלען B און C שמאלע, צו איז איינער פון זיי א ברייטער, ווי איז, ווען איינער פון די צוויי ווינקלען איז א גראָדער?

מיר האבן געזעהען, אז אין א גלייכאקסלדיגן דרייעק ליגן גלייכע ווינקלען אנטקעגן גלייכע זייטן; מיר קענען באווייזן, אז אין א פארשיידנ־זייטיגן דרייעק ליגט אנטקעגן א גרעסערער זייט א גרעסערער ווינקל.

טעארעמע. <u>אין יעדן דרייעק ליגט אנטקעגן דער גרעסערער זייט דער גרעסערער ווינקל.</u>

זאל אין דעם דרייעק ABC (פיג. 93) די זייט AB זיין גרעסער ווי די זייט AC קנייטש איין דעם דרייעק אזוי, אז AC זאל זיך ארויפלייגן אויף AB, דעמאלט וועט דער פינטל C ליגן אויף AB צווישן די פינטלעך A און B, לאמיר זאגן, אויף דעם פינטל D. דער קנייטש צעטיילט דעם ווינקל CAB אויף העלפט און שניידט BC אין א פינטל P; CP איז קאנגרועַנט מיט PD, און דער ווינקל ACB איז קאנגרועַנט מיט דעם ווינקל ADP. אבער ADP איז א דרויסנ־



פיג. 93.

דיגער ווינקל פון דעם דרייעק BDP, און ער איז דעריבער גרעסער, איידער דער ניט שכנישער אינווייניגסטער ווינקל DBP, אדער — אלץ איינס — ABC. דער ווינקל ACB, וואס ליגט אנטקעגן דער גרעסערער זייט, איז בכן גרעסער, ווי דער ווינקל ABC, וואס ליגט אנטקעגן דער קלענערער זייט. און דאס האט געדארפט באוויזן ווערן.

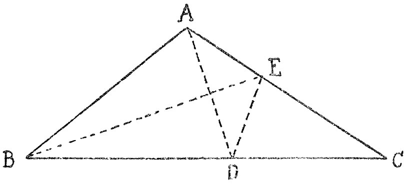
די זייטן פון א דרייעק. ווען מיר ווייסן די ווינקלען פון א דרייעק, ווייסן מיר אויך עפעס וועגן זיינע זייטן. ווען צוויי ווינקלען זיינען גלייך, זיינען אויך זייערע אנטקעגנדיגע זייטן גלייך; ווען צוויי ווינקלען זיינען ניט גלייך, איז די זייט אנטקעגן דעם גרעסערן ווינקל גרעסער ווי די זייט אנטקעגן דעם קלענערן ווינקל. ווארום זי קען ניט זיין קלענער, ווייל דעמאלט וואלט דער ווינקל אנטקעגן איר געמוזט זיין דער קלענערער, און זי קען ניט זיין גלייך, ווייל דעמאלט וואלטן די ווינקלען געמוזט זיין גלייך. דערפון איז געדרונגען:

<u>אין יעדן דרייעק ליגט אנטקעגן א גרעסערן ווינקל א גרעסערע זייט.</u>

טעאָרעמע: די סומע פון צוויי זייטן פון א דרייעק איז גרעסער ווי די דריטע זייט.

עס ווערט פאַרשטייט זיך, זיין געגנוג, ווען מיר וועלן באווייזן, אז די גרעסטע זייט פון א דרייעק איז קלענער ווי די סומע פון ביידע אנדערע זייטן. זאל אין דעם דרייעק ABC די זייט BC (פיג. 94) זיין די גרעסטע. קנייטש איין דאס בלאט אזוי, אז BA זאל זיך ארויפלייגן אויף BC.

אזוי ווי דער קנייטש איז דער ביסעקטאר פון דעם ווינקל ABC, שניידט ער AC אין א פינטל צווישן A און C, לאמיר זאגן אין E. אזוי ווי BA איז קלענער ווי BC, וועט A ליגן אויף א פינטל D פון דעם אפשניט BC צווישן B און C. BD איז גלייך BA. מאך א קנייטש AD, גלעט אים אויס, קנייטש איבעראנייס איין דעם ערשטן קנייטש BE, דעמאלט וועט דער קנייטש AD זיין ארויפגעקנייטשט אויף זיך גופא און ער וועט זיין פערפענדיקולאר צום קנייטש BE; AE ליגט איצט אויף ED און דער ווינקל EAD דעקט זיך מיט דעם ווינקל EDA, וואס איז א טייל פון דעם ווינקל ADC. דעריבער איז אין דעם דרייעק CAD די זייט CA, וואס ליגט



פיג. 94.

אנטקעגן דעם גרעסערן ווינקל, גרעסער ווי די זייט DC, וואס ליגט אנטקעגן דעם קלענערן ווינקל. אבער, ווײַבאַלד CA איז גרעסער ווי CD, און BA איז דאָך גלייך BD, טראגט דאָך דער שכל אויס, אז CA מיט AB צוזאמען איז גרעסער ווי CD מיט DB צוזאמען, אדער, אנדערש געזאגט, די סומע פון די צוויי זייטן AC און AB איז גרעסער ווי די דריטע זייט BC. און דאס האט געדארפט באוויזן ווערן.

איינגימונגען.

זאָג, וואסער פון די פאלגנדיגע דרייעקן איז א שמאלווינקלדיגער, וואסער איז אַ ברייטווינקלדיגער, וואסער איז אַ גראָדווינקלדיגער:

א גלייכזייטיגער דרייעק;

יעדערער פון די צוויי דרייעקן, אויף וועלכע א גלייכזייטיגער דרייעק ווערט צעטיילט דורך א גראָדער, וואס פארבינדט דעם מיטן פון איין זייט מיט איר אנטקעגנדיגן עק;

יעדערער פון די צוויי דרייעקן· אויף וועלכע עס ווערט צעטיילט יעדערער פון די צוויי פריהערדיגע דרייעקן· ווען מען פארבינדט דעמ־זעלביגן עק מיט די מיטנט פון די אנטקעגנדיגע זייטן·

דער שטח פון א דרייעק· מיר ווייסן· וואס דאס הייסט דער שטח פון א דרייעק (§ 19)· פון די דערקלערונגען פון דעם שטח פון א דרייעק און פון די דערקלענונגען פון די ווינקלען פון א דרייעק איז קלאָר· אז דער אינווייניגסטער רוים פון א דרייעק ליגט אין דעם אינווייניגסטן רוים פון יעדן ווינקל פון דעם דרייעק·

קאנגרועגטע דרייעקן·

§ 25. תנאים פאַר דער קאנגרועגטקייט פון דרייעקן·

אין די פריהערדיגע קאפיטלען האבן מיר זיך אָפט פארנומען מיט צוויי אדער מער דרייעקן· וואס זיינען געווען אפגעשניטן פון א איינאיינציגן דרייעק· און מיר האבן געוויזן· אז אזעלכע דרייעקן דעקן זיך· צוויי דרייעקן· וואס דעקן איינער דעם אנדערן· הייסן «קאנגרועגט» אדער «אין אלע פרטים גלייך»· עס איז קלאר· אז ניט בלויז זייערע שטח׳ס· נייערט אויך זייערע זייטן און ווינקלען זיינען פּאָרווייז גלייך· ווארום זיי דעקן זיך דאָך פּאָרווייז·

איידער מיר גייען ווייטער· וועלן מיר איינפירן א נייעם טערמין· ד׳ ה׳ אזא וואָרט· וואס זאל האבן א פעסטן טייטש איין מאל פאַר אַלע מאל; אין פריוואטן לעבן קענען מיר אונטער דעם ווארט פארשטיין· וואס מ׳ר ווילן; אין דער וויסענשאפט· בפרט אין דער געאמעטריע· פארשטייען מיר אונטער אים בלויז דאָס· וואס מיר האָבן איין מאָל פאר אלע מאָל אָפּ־גערעדט· אזעלכע טערמינען פירט מען איין· כדי אויסצודריקן די געדאנקען קירצער· קלארער און שטרענגער· אז דו וועסט עלטער ווערן· וועסטו נאָך מער פארשטיין די וויכטיגקייט פון טערמינען·

דו קענסט דאָך דעם אויסדרוק «געגליכן זיין»· איין מענש איז גע־גליכן דעם אנדערן· דאס הייסט נאָך ניט· אז זיי זיינען אין אלע פרטים גלייך· דאס הייסט דאס רוב· אז די צורה פון איינעם זעהט אויס· ווי די צורה פון דעם אנדערן; אַמאָל ווייטער מיינט מען דערמיט· אז איינער

האָט דעמזעלביגן כאראקטער ווי דער אנדערער; אקיצור, זיי «זיינען געגליכן» הייסט זיי זיינען גלייך אין איינעם א פרט אדער אין עטליכע פרטים· צוויי זאכן זיינען געגליכן הייסט, אז אין א געוויסן פרט אדער אין עטליכע געוויסע פרטים זיינען זיי גלייך· צוויי פילקעס קענען זיין געגליכן אין דעם פרט פון זייער פאַרב, אבער זיי זיינען ניט גלייך אין זייער גרייס; זיי קענען זיין געגליכן אין דעם פרט פון זייער וואָג, אבער ניט אין דעם פרט פון זייער פארב און ניט אין דעם פרט פון זייער גרייס; עס קענען אויך זיין צוויי פילקעס, וואס זיינען געגליכן הן אין דעם פרט פון דער פארב והן אין דעם פרט פון דער וואָג והן אין דעם פרט פון דער גרייס וכ"ו: דעמאלט זיינען זיי געגליכן אין אלע פרטים· צוויי גלייכאקסל־דיגע דרייעקן קענען האבן גלייכע גרונטן און ניט גלייכע אקסלען אדער פארקערט; אין דעם ערשטן פאל זאגן מיר: זיי זיינען געגליכן אין דעם גרונט; אין דעם צווייטן פאַל זאגן מיר: זיי זיינען געגליכן אין די אקסלען·

דער שטח, די זייטן און די ווינקלען פון א דרייעק הייסן «עלע־מענטן פונם דרייעק»·

נאָך אונזער דערקלערונג וועסטו פארשטיין דעם אויסדרוק: צוויי דריי־עקן זיינען געגליכן אין די אדער יענע עלעמענטן·

ווען דו וועסט אויפצכענען צוויי דרייעקן אויף א בלאט פאפיר, וועט ניט שטענדיג מיגליך זיין צו קנייטשן דאס פאפיר אזוי, אז מיר זאלן קענען דערגיין, צי זיינען די דרייעקן קאנגרועגט, צי ניט· דעריבער איז עס וויכטיג צו וויסן, אין וויפיל עלעמענטן די דרייעקן מוזן זיין געגליכן, אז, ניט ארויפלייגנדיג זיי איינעם אויף דעם אנדערן, זאלן מיר קענען זאגן, אז זיי זיינען קאנגרועגט· פאַרגלייכנדיג דרייעקן, מוזן מיר פאַר־ווייז פארגלייכן זייערע עלעמענטן: דעם שטח, די דריי זייטן, די דריי ווינקלען פון יעדערן· עס איז ניט נויטיג צו וויסן אלע זיבן עלעמענטן, כדי צו דערגיין, אז געגעבענע דרייעקן זיינען קאנגרועגט· די שטח'ס דארפן מיר בכלל ניט וויסן, זיי זיינען ממילא גלייך, ווען די איבעריגע פאָרן זיינען גלייך· וואס איז נוגע די זייטן און די ווינקלען, קלעקט עס צו וויסן, צי זיינען עטליכע פון זיי גלייך, כדי צו וויסן, צי די איבעריגע זיינען גלייך·

עס קלעקט צו וויסן די גלייכקייט פון דריי פאָרן אין דרייערליי קאמ־בינאציעס· לאמיר זיי אלע דורכנעמען·

טעארעמע· צוויי דרייעקן זיינען קאנגרועגט, ווען זיי זיינען גע־גליכן אין צוויי זייטן און אין דעם ווינקל צווישן זיי·

דאָ קענסטו זעהן, ווי נוצליך אונזער טערמין איז· ווען מיר וואלטן ניט געהאט דעם טערמין «זיין געגליכן», וואלטן מיר אונזער טעארעמע געמוזט אויסדריקן אזוי: צוויי דרייעקן זיינען קאנגרועגט, ווען צוויי זייטן פון איין דרייעק זיינען גלייך צוויי זייטן פון דעם אנדערן דרייעק, און דער ווינקל צווישן די זייטן אין איין דרייעק איז גלייך דעם ווינקל צווישן די זייטן אין דעם אנדער דרייעק· דער זאץ איז מגושמדיג לאנג לגבי דעם ערשטן·

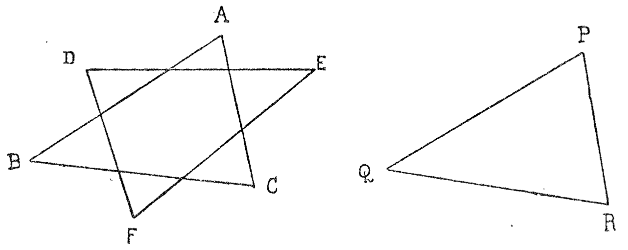
לאמיר איצט באווייזן די טעארעמע·

זאלן ABC און DEF זיין צוויי אזעלכע דרייעקן, זאל זיין

$$AB = DE$$
$$AC = DF$$

און דער ווינקל EDF = ווינקל BAC·

מיר דארפן באווייזן, אז די דרייעקן זיינען קאנגרועגט· אויף דער פיג· 95 זיינען די דרייעקן אויסגעקנייטשט אזוי, אז עס איז ניט מיגליך



פיג· 95·

ארויפצולייגן זיי איינעם אויף דעם אנדערן, און אויפן אויג קען מען אויך ניט זעהען, צו זיי זיינען קאנגרועגט·

נעם א אנדער בלאט פאפיר, קנייטש אויס א גראָדע און צייכן אויף אויף איר צוויי פינטלעך P און Q אזוי, אז דער אָפשניט PQ זאָל זיין גלייך AB· לייג אים ארויף אויף DE, וועסטו זעהן אז ביידע אָפשניטן זיינען גלייך· ביי P קנייטש אויס א ווינקל גלייך BAC און לייג אים ארויף אויף דעם ווינקל EDF: אויך זיי זיינען גלייך· ווען מיר וועלן אויף דער

צווייטער זייט פון דעם ווינקל P נעמען א פּינטל R אזוי, אז PR זאל זיין גלייך AC, און מיר וועלן ארויפלייגן PR אויף DF, וועלן מיר געפינען, אז אויך אטדי אָפּשניטן זיינען גלייך. קנייטש איצט אויס די ליניע QR, שנייד ארויס דעם דרייעק PQR, איבערלאזנדיג שמאלע ראַנדער.

לייג איצט ארויף P אויף A, און די גראַדע PQ אויף AB, דעמאלט מוז זיך Q ארויפלייגן אויף B, ווייל PQ = AB, און די זייט PR מוז זיך ארויפלייגן אויף דער זייט AC, מחמת דער ווינקל QPR איז דאָך גלייך דעם ווינקל BAC; דעמאָלט מוז אבער דער פּינטל R ליגן אויפן פּינטל C, מחמת PR = AC. אבער וויבאלד Q באדעקט B און R באדעקט C, מוז דער אָפּשניט QR באדעקן דעם אָפּשניט BC, ווייל צווישן צוויי פּינטלעך קען דורכגעפירט ווערן בלויז איין גראַדע. אויף אזא אופן דעקן זיך די דרייעקן PQR און ABC: זיי זיינען קאנגרועַנט. פונקט אזוי קענען מיר באווייזן, אז די דרייעקן PQR און DEF זיינען קאנגרועַנט. אבער ווען ביידע דרייעקן ABC און DEF זיינען יעדער באזונדער קאנגרועַנט דעם דריטן דרייעק PQR, זיינען זיי קאנגרועַנט איינער דעם אנדערן, לויט דער באוואוסטער אַקסיאָמע.

דירעקטע קאנגרועַנטקייט און סימעטריע. ווען מיר באדעקן די דרייעקן ABC און DEF מיט דעם דרייעק PQR, קענען געמאלט זיין צוויי פאלן: 1) דער דרייעק PQR קען ארויפגעלייגט ווערן אויף ביידע דרייעקן אזוי, אז דאס בלאַט פּאפּיר זאל אין ביידע פאַלן ליגן מיט דערזעלביגער זייט אירער אויף אונטן; 2) עס קען אבער געמאלט זיין, אזוי, אראפּנעמענדיג דעם דרייעק PQR פון דעם דרייעק ABC, מוזן מיר אים אריבערדרייען אויף דער אנדערער זייט, ווען מיר ווילן מיט אים באדעקן דעם דרייעק DEF. אין דעם ערשטן פאל, אויב די דרייעקן ABC און DEF ליגן פאר אונז איינער לעבן דעם אנדרן, זעהען זיי אויס גאנץ גלייך. מיר זאגן וועגן אזעלכע דרייעקן, אז זיי זיינען דירעקט קאנגרועַנט. אין דעם צווייטן פאל קענען מיר צולייגן ABC צו DEF אזוי, אז AB און DE זאלן זיך דעקן, C און F וועלן אבער ליגן אויף פארשיידענע זייטן פון AB; איצט קענען מיר אריבערבייגן איין דרייעק אויף דעם אנדערן איבער AB. די דרייעקן וועלן דעמאלט, ווען זיי וועלן ליגן איינער לעבן דעם אנדערן, ניט אויסזעהען גלייך, אבער זיי וועלן זיין סימעטריש, ד. ה. איינער וועט זיין א אפשפיגלונג פון דעם צווייטן. אזעלכע דרייעקן הייסן סימעטרישע דרייעקן.

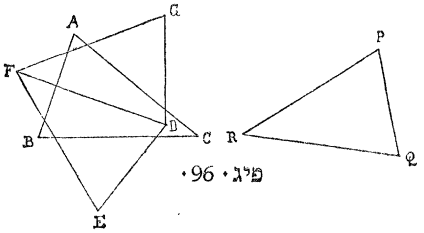
הערה. קאנגרועטע דרייעקן זיינען אדער דירעקט קאנגרועטע, אדער סימעטריש. מיר ווייסן שוין פונפריהער, אז קאנגרועטע דרייעקן זיינען געגליכן אין אלע פרטים, חוץ זייער לאַגע אין דעם רוים.

טעארעמע. צוויי דרייעקן זיינען קאנגרועטע, ווען זיי זיינען געגליכן אין איין זייט און אין צוויי ביילינגענדיגע ווינקלען.

אויף פיג. 95 זעהסטו אזעלכע צוויי דרייעקן ABC און DEF, אין וועלכע דער ווינקל ABC = ווינקל DEF, ווינקל ACB = ווינקל DFE, און BC = EF. די טעארעמע לאזט זיך באווייזן, ווי די פריהערדיגע.

טעארעמע. צוויי דרייעקן זיינען קאנגרועטע, ווען זיי זיינען געגליכן אין דריי זייטן.

פיג. 96 ווייזט צוויי אזעלכע דרייעקן ABC און DEF. עס איז: AB = DE, BC = EF, CA = FD. קאנסטרואיר א דרייעק PQR, א קאנגרועטן צו ABC, אויפן יסוד פון איינער פון די לעצטע טעארעמעס.



פיג. 96.

לייג צו PR צו DF אזוי, אז P זאל ליגן אויף D, דעמאלט מוז R ליגן אויף F, מחמת DF = PR. לייג אוועק דעם דרייעק אזוי, אז Q זאל ליגן אויף יענער זייט פון DF, וואס ליגט אנטקעגן E. זאל G זיין דער פינטל, אויף וועלכן Q וועט זיך ארויפלייגן. פיר אַדורך DG. היות ווי FG = FE, קענען מיר איינקנייטשן דאס בלאַט אזוי, אז E זאל ליגן אויף G, און F זאל בלייבן אויף זיין אָרט. היות ווי DG = DE, קענען מיר ארויפלייגן G אויף E, פיקסירנדיג D. עס איז אבער פאראן בלויז איין מיגליכקייט איינצוקנייטשן דאס בלאט אזוי, אז G זאל ליגן אויף E, דהיינו ווען EG ווערט ארויפגעקנייטשט אויף זיך גופא, און דערביי מוז EG זיין פערפענדיקולאַר צום קנייטש. אבער דער קנייטש מוז, ווי מיר האבן געזעהען, דורכגיין אי דורך F אי דורך D, ד. ה. ער מוז ליגן אויף FD; FG דעקט זיך מיט FE, און DG מיט DE, און דער דרייעק FGD דעקט זיך מיט דעם דרייעק DEF, דאס הייסט ביידע דרייעקן זיינען קאנגרועטע. אבער דער דרייעק FGD איז דאך דער צו־

געלייגטער דרייעק PQR. דעריבער איז דער דרייעק PQR קאנגרועטנט דעם דרייעק DEF. דער דרייעק PQR, ווייטער, איז דאָך, לויט דער קאנסטרוקציע זיינער, קאנגרועטנט דעם דרייעק ABC. אבער, ווען צוויי דרייעקן ABC און DEF זיינען יעדער באזונדער קאנגרועטנט דעם דרייעק PQR, זיינען זיי קאנגרועטנט איינער דעם אנדערן. און דאס האט געדארפט באוויזן ווערן.

פאראלעלע ליניעס.

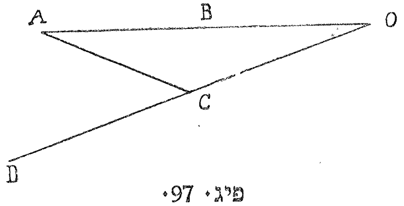
§ 26. אנטקעגנדיגע זייטן פון א ראָמב.

די אנטקעגנדיגע זייטן פון א ראָמב אדער פון א גראָדעק רופט מען פאראלעלע ליניעס אדער פשוט פאראלעלע. אין א קוואדראט, וואס ער איז א ספעציעלער מין גראָדעק, זיינען די אנטקעגנדיגע זייטן אויך פאראלעלע.

ווען דו וועסט פארלענגערן אנטקעגנדיגע זייטן פון א ראמב, וועלן זיי זיך אויף דיין בלאַט ניט שניידן, און דו וועסט זעהן אויפן אויג, אז זיי וועלן זיך בכלל ניט שניידן. מען קען דאס אויך באווייזן.

טעארעמע. אנטקעגנדיגע זייטן פון א ראָמב שניידן זיך ניט, וויפיל מען זאל זיי ניט פארלענגערן.

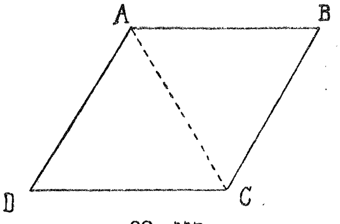
זאלן OA און OD זיין צוויי שטראלן, וואס גייען ארויס פון איין פינטל O. נעמען מיר אויף דער ערשטער גראָדער צוויי פינטלעך A און B אין דער ריכטונג פון A צו O, און אויף דער צווייטער אויכעט צוויי פינטלעך D און C אין דער ריכטונג פון D צו O (פיג. 97); פארבינדן מיר A מיט C. דער ווינקל ACD איז א דרויסנדיגער ווינקל פון דעם דרייעק ACD,



פיג. 97.

דעריבער איז ער גרעסער ווי דער ניט שכנישער ווינקל CAB. פארדעק איצט דעם פינטל O; איצט זעהסטו ניט, צו AB און DC שניידן זיך, ווען מען פארלענגערט זיי, צי ניט. אבער אויפן סמך פון אונזער פריהערדיגער

חקירה קענסטו זאגן, אז בּאַם זיי שניידן זיך, מוז דער ווינקל ACD זיין גרעסער ווי דער ווינקל CAB.



פיג. 98.

איצט גיב א קוק אויף דעם ראָמב ABCD (פיג. 98). מיר ווייסן נאָך ניט, צי AB און DC שניידן זיך, צי ניט, אבער אויפן סמך פון דער פריהערדיגער חקירה קענען מיר זאגן, אז, באם זיי וואלטן זיך געשניטן, וואלט דער ווינקל ACD געווען גרעסער ווי דער ווינקל CAB; אבער מיר ווייסן, אז אין א ראָמב זיינען אָטדי צוויי ווינקלען גלייך (§ 14), דעריבער קענען זיך AB און DC, צוויי אנטקעגנדיגע זייטן פון דעם ראָמב, ניט שניידן, און דאס האט געדארפט באוויזן ווערן[1].

דעפיניציע פון פאראלעלע ליניעס.

פאראלעליזם איז א באַציהונג צווישן דער לאגע פון צוויי גראָדע, ניט בלויז פון צוויי אָפּשניטן, פונקט אזוי ווי די פערפענדיקולארקייט איז א באציהונג צווישן דער לאגע פון צוויי גראָדע, ווי דו דערמאנסט זיך מסתמא. הגם וועגן דער מציאות פון פאראלעלע ליניעס האסטו זיך דערוואוסט פונם ראָמב, פונדעסטוועגן איז בעסער צו געבן אַן אנדער דעפיניציע פון פאראלעלע ליניעס:

דעפיניציע. פאראלעלע ליניעס זיינען צוויי, אויף איין פליין ליגנדיגע גראָדע, וואס שניידן זיך ניט, וויפיל מען זאל זיי ניט פארלענגערן.

אונזער לעצטע טעארעמע קען מען איצט אויסדריקן מיט אנדערע ווערטער: אנטקעגנדיגע זייטן פון א ראָמב זיינען פּאַראַלעל.

(דו זעהסט, ווי קורץ מען קען זיך אויסדריקן אַ דאַנק דער איינפירונג פון דעם טערמין «פּאַראַלעל»).

איינניטונגען.

1. באווייז, אז אנטקעגנדיגע זייטן פון א גראָדעק זיינען פאראלעל.

2. באווייז, אז די גראָדע, וואס פארבינדט די מיטנס פון צוויי זייטן

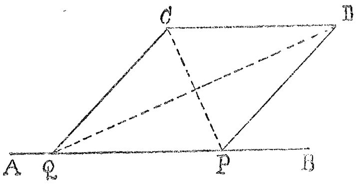
[1] כדי די חקירה זאל זיין קלארער, איז בעסער צו פארבינדן מיט א פונקטיר (אויף דער פיג. 97) B מיט C און A מיט D, און פארגלייכן דעם פירעק ABCD פון דער פיג. 97 מיטן פירעק ABCD פון דער פיג. 98. דער איבערזעצער.

פון א גלייכאקסלדיגן דרייעק, איז פאראלעל צו דער דריטער זייט (ביידע זיינען פערפענדיקולאר צו דערזעלביגער גראָדער)·

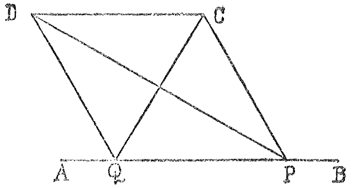
קאָנסטרוקציע· קאָנסטרואיר א פאראלעלע צו א געגעבענער גראָדער דורך א פינטל דרויסן פון דער געגעבענער גראָדער·

מען קען די קאָנסטרוקציע אויספירן מיט א פולע מעטאָדן· זאל C זיין דער געגעבענער פינטל און AB די געגעבענע גראָדע· פארבינד C מיט א פינטל Q פון AB·

מעטאָד 1· קאָנסטרואיר א ראָמב, וואס זיין דיאגאנאל איז CQ און וואס איינע פון זיינע זייטן ליגט אויף QB· CD, די אנטקעגנדיגע זייט פון QP, איז די פארלאנגטע פאראלעלע (פיג· 99)·



פיג· 100·



פיג· 99·

מעטאָד 2· באשרייב א ראָמב, וואס איין זייט זיינע ליגט אויף CQ, די אנדערע אויף QB· CD, די אנטקעגנדיגע זייט פון QP, איז די פאר־לאנגטע פאראלעלע·

מעטאָד 3· אויף CQ ביי C קאָנסטרואיר א ווינקל QCD גלייך דעם ווינקל CQB, אבער אויף דער אנטקעגנדיגער זייט פון CQ· דעמאלט איז CD די פארלאנגטע פאראלעלע (פיג· 99)·

דער לעצטער מעטאָד איז זיך סומך אויף דער אייגנשאפט פון א ראָמב, אז זיינע אנטקעגנדיגע ווינקלען זיינען גלייך און ווערן געטיילט אויף העלפט דורך דעם דיאגאנאל· די קאָנסטרוקציע מיט דעם לעצטן מעטאָד איז זעהר לייכט אויסצופירן, ווען מען פירט אפריהער CQ פערפענדיקולאר צו AB (אמבעסטן מיט דער פאפירענער ווירע) און דערנאָך CD פערפענ־דיקולאר צו CQ· מיט דעם לעצטן מעטאָד קנייטשט זיך אמבעסטן·

די מציאות פון א פאראלעלער צו א גראָדער דורך יעדן געגעבענעם פינטל· דו זעהסט, אז צו א געגעבענער גראָדער איז דורך יעדן געגעבענעם פינטל פאראן א פאראלעלע צו איר, אפילו ווען

מיר זיינען ניט ביכולת דורכצופירן זי. צו דעם קאנט פון דיין פאפירענער ווירע איז אפילו אויף דער לבנה פארהאן א פאראלעלע דורך ליאדוועלכן פינטל פון דער לבנה. זי ליגט אויף דעם פליין, וואס גייט אַדורך דורך דעם פינטל און דודך דעם קאנט פון דער ווירע; זי איז פערפענדיקולאר צו יעדער גראַדער, וואס ליגט אויף א פליין, א פערפענדיקולארן צו דעם קאנט, און וואס האט מיט איר א בשותפותדיגן פינטל. איצט איז די קשיא: צי איז דאס די איינציגע פאראלעלע גראַדע דורך דעם פינטל צו דער געגעבענער גראַדער.

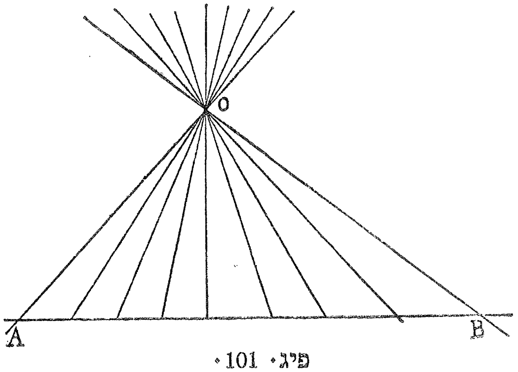
דאס איז א בארימטע קשיא. און עס איז ניט אזוי לייכט צו געבן א ענטפער אויף איר.

לאָמיר אקארשט זעהען, צי מיר באקומען מיט אונזערע פארשיידענע מע־טאדן אלעמאָל דיזעלביגע פאראלעלע. דאס איז ניט אזוי גאנץ קלאָר, ווי ביי א פערפענדיקולאר. דארטן האבן מיר געקענט ווייזן, אז, מיט וועלכן מעטאד מיר זאלן פון א געגעבענעם פינטל ניט אראפלאזן א פערפענדיקולאר צו א גע־געבענער גראַדער, וועט דאס אלעמאל זיין דיזעלביגע ליניע. צי קענען מיר עס דאָ אויך? ווען מיר וועלן אויסקלייבן דעם פינטל Q אויף דער גראַדער AB (פיג. 99), ווי עס גלוסט זיך אונז, צי וועט דעמאָלט אלעמאל, וואו Q זאל ניט ליגן, ארויסקומען דיזעלביגע פאראלעלע? דו קענסט געפינען, קנייטשנדיג, אז אזוי וועט עס טאקע אלעמאָל זיין. אבער דאס איז קיין ראיה ניט, אז עס איז ריכטיג, ווייל דיינע קנייטשן קענען זיין שלעכט, אדער דיין אויג קען האבן א טעות. דאס, וואס דיין אויג זעהט, וואלט געווען ריכטיג, ווען מיר וואלטן עס געקענט איינזעהען מיט א לאָגישער חקירה, מיטן שכל, ד. ה. ווען מיר וואלטן דאס געקאנט באווייזן. אבער באווייזן לאזט זיך דאס ניט, פונקט אזוי ווי מיר קענען ניט בא־ווייזן, אז די ווינקלען פון א ראָמב, וואס ליגן אויף איין זייט, זיינען דערגאנצנדיגע ווינקלען. אבער דו געפינסט פארט, סיי קנייטשנדיג, סיי צייכענענדיג, הן מיט דיין ווירע והן מיט די פיינסטע אינסטרומענטן, אז אין יעדן ראָמב זיינען יענע ווינקלען דערגאנצנדיגע. ווען מען וואלט געקענט באווייזן, אז די ווינקלען ביי איין זייט פון א ראָמב זיינען דער־גאנצנדיגע ווינקלען, דעמאלט וואלט מען אויך געקענט דערווייזן, אז, אלץ איינס מיט וועלכן מעטאד מיר זאלן ניט קאנסטרואירן די פאראלעלע, איז עס אלעמאָל דיזעלביגע גראַדע. ווארום דעמאלט וואלסטו געקענט באווייזן, אז דער פערפענדיקולאר פון D אויף AB איז פונקט אזוי גרויס, ווי דער

פערפענדיקולאר פון C אויף AB. אבער מיר קענען ניט באווייזן דעם כלל בנוגע די ווינקלען פון דעם ראָמב, און דעם כלל בנוגע דער פאראַלעלער קענען מיר אויך ניט באווייזן. מיר מוזן זיך פארלאזן אויף אונזער בליק, אויף אונזערע פיינסטע אינסטרומענטן, אויף אונזער לאנגן ניסיון. מיר מוזן נעמען צו הילף א נייע אקסיאמע, וואס דער שכל איז זי אפילו ניט מחייב, אבער אונזער בליק, אונזער אנשויאונג איז זי מחייב. אונזער בליק אַמפּערט זיך קעגן דער סברה, אז די אקסיאמע (דער פּאָסטולאַט) קען זיין פאלש. די אקסיאמע זאָגט:

אקסיאמע. צו א גראָדער איז פארהאן בלויז איין איינציגע פאראַלעלע דורך א פינטל דרויסן פון איר.

כדי זיך קלאר צו מאכן די אקסיאמע, נעם א גרויסן בויגן פאפיר און פיר אויף אים דורך די גראָדע AB; קלייב אויס לויט געלוסט א פינטל O דרויסן פון דער גראָדער און איין פינטל אויף דער גראָדער; פארבינד די צוויי פינטלעך און פארלענגער די פארבינדנדיגע ליניע איבער O אריבער (פיג. 101). נעם איין פינטל נאך דעם אנדערן אויף AB, פארבינד זיי



פיג. 101.

אלע מיט O און פארלענגער די פארבינדנדיגע ליניעס איבער O אריבער: דו באקומסט לויטער שטראלן פון דעם פינטל O. אלע שטראלן ליגן אויף דעמזעלביגן פליין (דיין בלאט) און שניידן AB אָדער אין זייער ריכטונג אָדער אין דער אנטקעגנדיגער ריכטונג. דו זעהסט באשיינ־פערליך, אז דו קענסט באדעקן מיט אזעלכע ליניעס דעם גאנצן פליין,

חוץ די אינווייניגסטע רוימען פון די אפגעקערטע ווינקלען, וואס מיר באַ־קומען, פארבינדנדיג O מיט די פינטלעך, אין וועלכע AB שניידט זיך מיט די רענדער פון דעם פאפיר· ווען מיר וואָלטן נעמען א גרעסער בלאט פאפיר, וואלטן זיך אטדי אפגעקערטע ווינקלען פארקלענערט, און, וואס גרעסער דאס בלאט פאפיר איז, אלץ ווינציגער ווערן די ווינקלען· דו קענסט זיך אין די געדאנקען פארשטעלן אזא גרויסן בויגן פאפיר, אז די ווינקלען זאלן ווערן אזוי קליין, ווי דו ווילסט· ווי קליין דער אפגעקערטער ווינקל זאלן ניט זיין, כל זמן ער איז נאר פארהאן, בילדן די זייטן OA און OB ניט קיין גראָדע ליניע, אבער זיי דערנעהנטערן זיך כסדר אלץ מער און מער צו א ווינקל פון 180 גראָד· דער גבול פון אזא דערנעהנ־טערונג איז, אז די צוויי זייטן וועלן סוף כל סוף ליגן אויף איין גראָדער, וואס גייט אַדורך דורך O· אָטדי גראָדע איז די איינציגע פאראלעלע דורך O צו AB·

פון אונזער אקסיאמע איז געדרונגען, אז לא־די וואס מיר באקומען מיט אונזערע פארשיידענע מעטאדן אלעמאָל דיזעלביגע פאראלעלע, איז בכלל ניט פארהאן קיין איין מעטאד, מיט וועלכן מיר זאלן קענען קאנ־סטרואירן א אנדערע ניט־שניידנדיגע גראָדע אויף דעמזעלביגן פליין· פארוואס זאגן מיר: «אויף דעמזעלביגן פליין»? מחמת א שטראל דורך O, וואס ליגט ניט אויף דעמזעלביגן פליין, וועט שניידן דעם פליין בלויז אין O, ער קען ממילא ניט שניידן AB· אבער אזא ניט־שניידנדיגע איז ניט קיין פאראלעלע; בלויז אזעלכע ניט־שניידנדיגע ווערן אנגערופן פאראלעלע ליניעס, וואס ליגן אויף איין פליין· דורך יעדן פינטל גייען אַדורך אהן א שיעור גראָדע, וואס שניידן ניט די געגעבענע גראָדע, אבער בלויז איין פאראלעלע צו איר·

פאראלעלע קאנטן פון א קוב· נעם דיין מאדעל פון א קוב, האלט אים אזוי, אז די ווענטל 1 זאל ליגן אויבן, און דער קאנט (3, 4) זאל זיין צוגעקערט צו דיר (פיג· 59)· רוף אָן די פאראלעלע קאנטן צו (3, 4) און די פליינען, אויף וועלכע זיי ליגן· עס זיינען פארהאן 3 אזעלכע קאנטן: (3, 1) אויף דער ווענטל 3, (4, 5) אויף דער ווענטל 4 און (5, 6) אויף דעם פליין, וואס צעטיילט דעם קוב אויף צוויי פריזמעס· דער לעצטער קאנט איז, ווי דו זעהסט, פאראלעל צו יעדן פון די צוויי אנדערע, ווארום ער איז די אנטקעגנדיגע זייט פון זיי אויף די קוואדראטישע ווענטלעך·

עס איז ניט אזוי לייכט צו זעהען, אז ער איז אויך פאראלעל צו (3, 4), אבער, ווען דו וועסט א קוק טאָן אויף דיין מאדעל פון א פריזמע, וועסטו עס תיכף דערקענען, מחמת דער קאנט איז די אנטקעגנדיגע זייט פון (3, 4) אויף דעם בלויען פליין.

ווען דו האסט צוויי ליאד וועלכע פאראלעלע ליניעס, למשל די קאנטן (3, 6) און (5, 6) און א פינטל O אויף דער צווייטער ליניע, און דו פירסט א פליין דורך דעם פינטל און דורך די ערשטע פאראלעלע, מוז דער פליין אנטהאלטן די צווייטע ליניע; דאס איז א פועל יוצא פון אונזער דעפיניציע פון פאראלעלע און פון אונזער אקסיאמע וועגן פאראלעלע. ווארום אויף יעדן פליין קענען מיר דורך דעם פינטל O פירן א פאראלעלע צו דער ערשטער גראָדער, אבער ניט מער ווי איין פאראלעלע, דעריבער דעקט זיך די געפירטע ליניע מיט דער צווייטער.

ווען מען פירט א פליין דורך איינער פון צוויי פאראלעלע, איז אָדער דער פליין אנטהאלט די צווייטע ליניע אויך, אדער ער שניידט זי בכלל ניט.

פאראלעליזם צווישן א גראָדער און א פליין. ווען א גראָדע ליניע און א פליין שניידן זיך ניט, וויפיל מען זאל זיי ניט פערלענגערן, זיינען זיי פאראלעל.

וועלכע קאנטן פון דעם קוב זיינען פאראלעל צו דעם פליין דורך (3, 4) און (5, 6)? דאס זיינען די קאנטן (3, 6) און (4, 5).

מיר האבען שוין געזעהען: ווען מען פירט א פליין דורך איינער פון צוויי פאראלעלע, און דער פליין אנטהאלט ניט די צווייטע גראָדע, איז דער פליין פאראלעל צו דער לעצטער.

דערפון איז געדרונגען: ווען עס איז געגעבן א גראָדע און א פליין, א פאראלעלער צו איר, און דורך דער גראָדער ווערט דורכגעפירט א צווייטער פליין, איז די גראָדע, אין וועלכערביידע פליינען שניידן זיך, פאראלעל צו דער געגעבענער גראָדער. ווארום די שניטליניע קען ניט שניידן די געגעבענע גראָדע, מחמת זי ליגט אויף א פליין, וואז שניידט ניט די געגעבענע גראָדע.

פאראלעלע צו איין און דערזעלביגער גראָדער. לאמיר זיך אומקערן צוריק צו אונזערע דריי קאנטן, די פאראלעלע צו (3, 4). ניט

צעשניידנדיג דעם קוב, זעהען מיר, אז (5, 6) איז פאראלעל צו (3, 6), און (3, 6) איז פאראלעל צו (3, 4). מיר קענען זיכער זיין, אז (5, 6) איז פאראלעל צו (3, 4).

טעאָרעמע: גראַדע, וואס יעדע פון זיי באזונדער איז פאראלעל צו איין און דערזעלביגער גראַדער, זיינען פאראלעל איינע צו דער אנדערער.

מיר וועלן באווייזן די טעארעמע פאַר די דריי קאנטן פון דעם קוב, אבער דער באוויז וועט זיין גילטיג בכלל פאַר אלע פאראלעלע.

עס איז קלאר, אז די ערשטע און די דריטע ליניע (3, 4) און (5, 6) קענען זיך ניט שניידן, ווארום, ווען זיי וואלטן זיך געשניטן, וואלט דער שניטפינטל געמוזט ליגן אי אויף דעם פליין 3 אי אויף דעם פליין 6, בכן אויף דער גראַדער (3, 6). מיר ווייסן אבער, אז דאס קען ניט זיין, ווייל קיין איין פינטל פון דער ערשטער אדער פון דער דריטער ליניע קען ניט ליגן אויף (3, 6). מיר דארפן איצט נאָך באווייזן, אז די ערשטע און די דריטע ליניע ליגן אויף איין פליין, כדי צו באווייזן, אז זיי זיינען פאראַ־לעלע, ניט בלויז ניט־שניידנדיגע. פיר א פליין דורך דער ערשטער ליניע (3, 4) און דורך א פינטל 0 פון דער דריטער ליניע (5, 6); דער פליין איז פאראלעל צו דער צווייטער ליניע (3, 6); דעריבער וועט ער זיך שניידן מיט דעם פליין (6) אין א גראַדער, א פאראלעלער צו דער צווייטער ליניע (3, 6). אבער אזא גראַדע קען זיין בלויז דער קאנט (5, 6), ווארום ער איז די איינציגע פאראלעלע ליניע צו דער צווייטער גראַדער דורך 0. דעריבער אנטהאלט דער פליין דורך דער ערשטער גראַדער און דורך דעם פינטל 0 דעם קאנט (5, 6). דערפון איז געדרונגען, אז (3, 6) און (5, 6) זיינען פאראלעל איינע צו דער אנדערער. און דאס האט געדארפט באוויזן ווערן.

אויסגעמיידטע קאנטן פון א קוב. רוף אָן די קאנטן, וואס גייען אדורך דורן דעם עק (1, 5, 6), וואס זיינען ניט פאראלעל צו (3, 4) און שניידן פונדעסטוועגן ניט (3, 4), וויפיל מען זאל זיי ניט פאַרלענגערן. דאס מוזן זיין די קאנטן, וואס ליגן ניט אויף דעם פליין פוןביידע פאראלעלע קאנטן (3, 4) און (5, 6). דאס זיינען די קאנטן (1, 5) און (1, 6).

איצט קענסטו אנרופן אלע קאנטן פון דעם קוב, וואס אי זיי זיינען ניט פאראלעל צו (3, 4) אי זיי שניידן ניט (3, 4). חוץ די דערמאנטע צוויי קאנטן זיינען פארהאן נאָך צוויי קאנטן אזעלכע: (2, 5) און (2, 6).

אַלע קאַנטן פון אַ קוב ווערן איינגעטיילט אין 3 גרופּעס. אין דער ערשטער גרופּער גייען אריין דער קאַנט (3, 4) און אַלע קאַנטן, פּאַראַלעלע צו אים; אין דער צווייטער גרופּע גייען אריין אַלע קאַנטן, וואָס שניידן (3, 4); אין דער דריטער גרופּע אַלע קאַנטן, וואָס ניט זיי זיינען פּאַראַלעל צו (3, 4) ניט זיי שניידן (3, 4). די קאַנטן פון דער לעצטער גרופּע רופט מען אויסגעמיידטע (אויסגעמיטענע) קאַנטן, מחמת אין זייער גאַנג מיידן זיי איינער דעם אַנדערן. בכלל: צוויי גראַדע, וואָס ליגן ניט אויף איין פליין, הייסן אויסגעמיידטע גראַדע. ממילא שניידן זיי זיך ניט.

ווי גרויס איז די צאָל פון די קאַנטן פון יעדער גרופּע? 4. די צאָל פון אַלע קאַנטן פון אַ קוב איז גלייך 3 מאָל 4, ד. ה. 12, ווי דו ווייסט שוין.

איינגיטונג.

וויפיל קאַנטן פון אַ טעטראַעדער זיינען אויסגעמיידטע בנוגע אַ געגעבענעם קאַנט?

פּאַראַלעלע פליינען.

§ 27. דעפיניציע פון פּאַראַלעלע פליינען.

אַנקוקנדיג די ווענטלעך 1 און 2 פון דיין קוב, זעהסטו, אַז די שניטליניעס פון 2 מיט 3 און מיט 4 זיינען פּאַראַלעל צו די שניטליניעס פון 1 מיט 3 און מיט 4. דערפון איז געדרונגען, אַז די פליינען 1 און 2 קענען זיך ניט שניידן, וויפיל מען זאָל זיי ניט פאַרלענגערן. וואָרום, ווען זיי וואָלטן זיך געשניטן, וואָלט די שניטליניע זייערע ניט געשניטן די קאַנטן (1, 3) און (1, 4), מחמת דער פליין 2 אַנטהאַלט ניט קיין איינעם פון די ביידע קאַנטן; הייסט דאָך דאָס, אַז אי די שניטליניע וואָלט געלעגן אויף איין פליין מיט (1, 4) און (1, 3) אי זי וואָלט ניט געשניטן קיין איינע פון זיי, אַדער, מיט אַנדערע ווערטער, זי וואָלט געווען פּאַראַלעל צו ביידע. אָבער דאָס קען ניט זיין, מחמת אַ פּאַראַלעלע צו איינעם פון אָטדי קאַנטן מוז זיין פּערפּענדיקולאַר צום צווייטן (פאַרוואָס?).

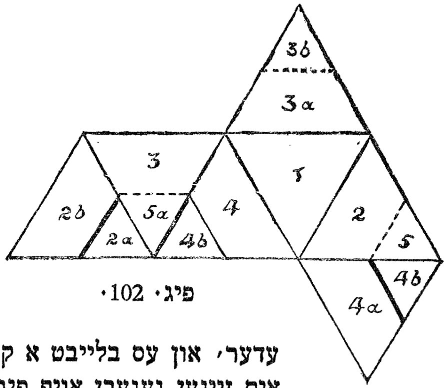
דעפיניציע. צוויי פליינען, וואָס שניידן זיך ניט, זיינען פּאַראַלעל איינער צו דעם אַנדערן.

עס איז איבעריג צוצוגעבן די ווערטער «וויפיל מען זאל זיי ניט פארלענגערן», מחמת אין דעם באגריף «פליין» גייט שוין אריין די גאנצע אויסשפרייטונג זיינע.

דרונג. אנטקעגנדיגע ווענטלעך פון א פליין זיינען פאראלעל איינע צו דער אנדערער.

(ד ר ו נ ג הייסט א זאץ, וואס ווערט געדרונגען דירעקט, אהן לאנגע חקירות, פון א אנדער זאץ).

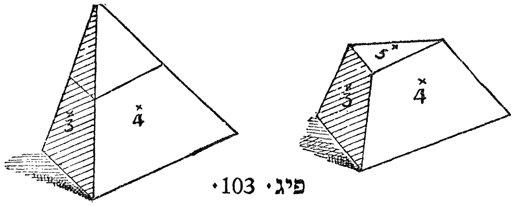
אויך אין א רעגולערן טעטראעדער קענסטו געפינען פאראלעלע פליינען. נעם איינע פון די ווענטלעך פאר א גרונט און צעטייל אויף העלפט די דריי קאנטן, וואס טרעפן זיך אין דעם שפיץ. דער פליין, וואס גייט אַדורך דורך די מיטנס פון די קאנטן, איז פאראלעל צום גרונט.



פיג. 102.

דורכשניידנדיג דעם טעטראעדער דורך אטדעם פליין, שניידן מיר אפ ביים שפיץ א קליינעם טעטראעדער, און עס בלייבט א קערפער, וואס די מאדעלן פון אים זיינען געגעבן אויף פיג. 102 און 103.

דער צושניט ווערט אויסגעשניטן, ווי דער צושניט פון א רעגולערן טעטראעדער (פיג. 83), דערנאך קנייטשט מען אים פאזע די פונקטירטע ליניעס און מען מאכט איינשניטן אין די דיקע ליניעס.


פיג. 103.

פארגלייכנדיג דעם נייען מאדעל מיט די מאדעלן פון א רעגולערן טעטראעדער, פון א שיפעלע און פון א קובי, ווערסטו תיכף דערזעהען, אז דער פליין, פאזע וועלכן דו האסט געמאכט דעם שניט, גייט דורך יענעם דיאַגאָנאַל

פון דער קוואַדראַטישער ווענטל פון דעם שיפּעלע, וואָס איז פּאַראַלעל צום שאַרפן קאַנט פון דעם שיפּעלע, ד. ה. פּאַראַלעל צום קאַנט צווישן דער ווענטל $1^{\times}$ און דער ווענטל $2^{\times}$ פון דעם טעטראַעדער. דער פּליין פון דעם שניט גייט אַדורך דורך דעם שניטפּינטל פון די דיאַגאָנאַלן פון דער קוואַדראַטישער ווענטל פון דעם שיפּעלע און אַנטהאַלט דעם דער־מאָנטן דיאַגאָנאַל, מחמת ער איז פּאַראַלעל צום שאַרפן קאַנט. פּונקט אַזוי איז די גראָדע, וואָס טיילט אויף העלפט די זייטן פון דעם טעטראַ־עדערס ווענטל $2^{\times}$, פּאַראַלעל צו דעם שאַרפן קאַנט און ליגט אויף דעם פּליין פון דעם שניט.

די קוואַדראַטישע ווענטל פון דעם שיפּעלע איז די ווענטל 2 פון דעם קוב. דעריבער גייט דער פּליין פון אונזער שניט דורך אַ דיאַגאָנאַל פון דער ווענטל 2 און טיילט אויף העלפט יענע דיאַגאָנאַלן פון די ווענטלעך 5 און 6, וואָס טרעפן זיך אין עק (1, 5, 6), ד. ה. עס איז דער פּליין, וואָס שניידט אָפּ דעם קובישן טעטראַעדער מיט דעם שפּיץ (2, 5, 6). דאָס אַלץ קען מען לייכט זעהען אויף די מאָדעלן.

ווען מיר שניידן אָפּ אַלע פיר עקן פון אַ רעגולערן טעטראַעדער, באַ־קומען מיר דעמזעלביגן קערפּער, וועלכן מיר באַקומען, אָפּשניידנדיק די אַכט עקן פון אַ קוב.

וויפיל ווענטלעך, עקן און קאַנטן האָט אונזער לעצטער מאָדעל?

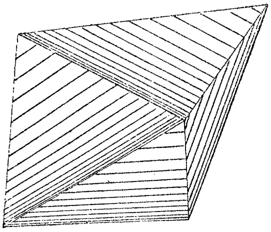
ווענטלעך	5	קאַנטן	9
עקן	6		2
	11		11

§ 28. דער רעגולערער אָקטאַעדער.

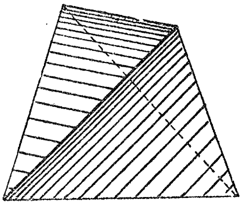
נעם איצט דיין מאָדעל פון אַ רעגולערן טעטראַעדער און פון אַ טעטראַ־עדער מיט אַ אָפּגעשניטענעם עק און האַלט זיי, ווי אויף דער פיג. 80, מיט דעם שאַרפן קאַנט (ד. ה. מיט דער שניטליניע פון די ווענטלאַך $1^{\times}$ און $2^{\times}$ פון דעם טעטראַעדער) אַראָפּ און מיט דער ווענטל 4^{+} פון דעם טעטראַ־עדער פאָרנט. דער אָפּגעשניטענער עק איז איצט לינקס. לאָמיר איצט אָפּשניידן דעם צווייטן עק רעכטס (פיג. 104, 105). דער נייער שניט וועט ווידער גיין דורך דעם דיאַגאָנאַל פון דעם קוואַדראַטישן פּליין, וואָס איז פּאַראַלעל צום שאַרפן קאַנט פון דעם שיפּעלע; ער וועט אויך ממילא דורכגיין דורך דעם מיטן פון דעם אויבערשטן קאַנט פון דעם טעטראַעדער,

און דער מיטן ליגט· ווי דו דערמאנסט זיך מסתמא· אין דעם שניטפינטל פון די דיאגאנאלן פון דער ווענטל 2 פון דעם קוב·

פיג· 106 ווייזט דעם צושניט פון א טעטראעדער מיט צוויי אפגעשניטענע עקן· פיג· 107 ווייזט דעם פארטיגן מאדעל· געהאלטן אויפן זעלביגן שטייגער ווי אויף פיג· 80· 104 און 105·

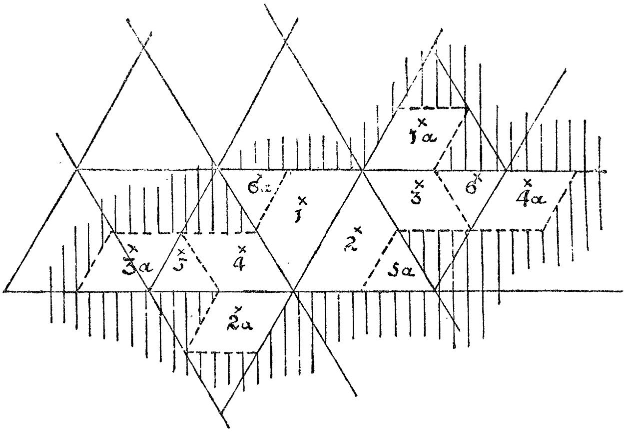


פיג· 104·



פיג· 105·

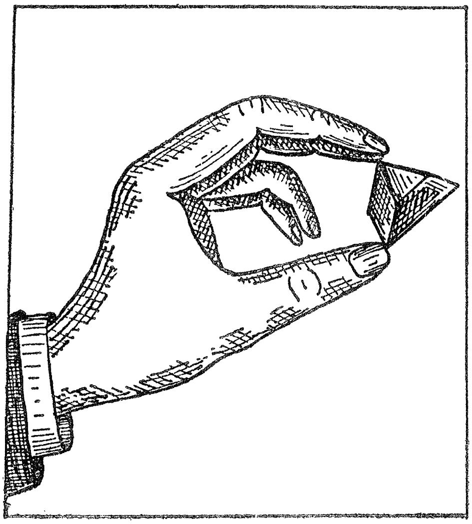
דו קענסט זיך איצט לייכט פארשטעלן· ווי דער מאָדעל וועט אויס־זעהען· ווען מיר וועלן אפשניידן די איבעריגע צוויי עקן· דער אונטער־



פיג· 106·

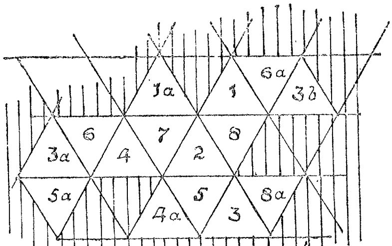
שטער טייל וועט אויסזעהען פונקט ווי דער אויבערשטער און וועט באשטיין פון 4 גלייכזייטיגע דרייעקן· אויף פיג· 108 זעהסטו דעם צושניט פון דעם

מאָדעל און אויף דער פיג· 109 דעם פארטיגן מאָדעל· ער הייסט רעגו־לערער אָקטאַעדער (אָקטאָ הייסט אויף גריכיש אַכט)· ער מוז זיין פולקום רעגולער· ווארום מיר האבן אים באקומען· אפשניידנדיג אלע עקן פון דעם קוב אדער אלע עקן פון דעם טעטרא־עדער· אין וואס פאר א סדר מיר וועלן ניט אפ־שניידן די עקן· וועט אַלע־מאָל איבערבלייבן דער־זעלביגער קערפער· דו זעהסט אויף דיין מאָדעל תּיכּף· אז אלע ווענטלעך זיינען קאנגרוענט· און אז זיי שניידן זיך זאַלבעפערט אין יעדן עק· אזוי אז הן די עקן והן די קאנטן זעהען אויס גלייך· דער אָקטאַעדער איז געראָטן אין דעם טאָפּעלן טעטראעדער· אבער דער לעצטער איז ניט געווען רעגולער· ווייל אין איין עק זיינען געווען גרופּירט דריי ווענטלעך· אין דעם אנדערן פיר ווענטלעך·



פיג· 107·

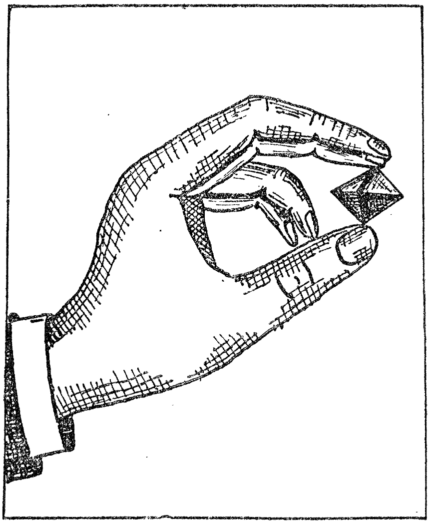
דער שפּיץ פון אונזער אָק־טאַעדער איז געווען· ווי מיר האבן געזעהען· דער שניטפּינטל פון די דיאגאנאלן פון דער ווענטל 2 פון דעם קוב· אנאלאָגיש· איז דער אנטקעגנדיגער שפּיץ דער שניט־פּינטל פון די דיאגאנאלן פון דער ווענטל 1 פון דעם קוב· אויף אזא אופן איז יעדער עק פון דעם אָק־טאַעדער א שניטפּינטל פון די דיאגאנאלן פון א ווענטל פון דעם קוב· וויפיל עקן האט א אקטאעדער? פונקט אזויפיל עקן· וויפיל ווענטלעך א



פיג· 108·

קוב האט, דהיינו זעקס. ארויסשניידנדיג דעם אקטאעדער פון דעם קוב, שניידן מיר יעדעס מאל, ווען מיר באקומען א ווענטל פון דעם אקטאעדער, אָפּ א עק פון דעם קוב. דעריבער האט דער אקטאעדער פונקט אזויפיל ווענטלעך, וויפיל עקן דער קוב האט, ד. ה. אכט. אויב אונזער רעכנונג איז ריכטיג, מוז דער אקטאעדער האבן פונקט אזויפיל קאנטן, וויפיל דער קוב. צייל זיי אויף דיין מאדעל. דו זעהסט, עס איז אלץ ריכטיג:

עקן	6	קאנטן	12
ווענטלעך	8		2
	14		14


פיג. 109.

לאמיר צונויפנעמען אלץ, וואס מיר האבן ביז איצט גע־פונען מיט אונזערע שניטן:

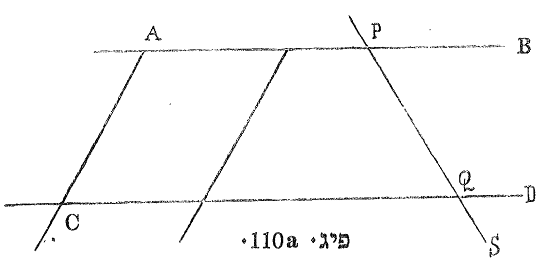
מיר קענען אפשניידן פון א קוב א רעגולערן טעטראעדער און א רעגולערן אקטאעדער. א רעגולערן טעטראעדער באַ־קומען מיר, אפשניידנדיג פיר עקן פון א קוב, וואס יעדע פּאָר זיינען צוויי אנטקעגנדיגע עקן פון א ווענטל פון דעם קוב. די פיר עקן פון דעם טעטראעדער זיינען די איבערגעבליבענע פיר עקן פון דעם קוב. יעדער קאנט פון דעם טעטראעדער איז א דיאגאנאל פון איינער פון די זעקס ווענטלעך פון דעם קוב.

א רעגולערן אקטאעדער באקומען מיר, אפשניידנדיג אלע אכט עקן פון א קוב. די עקן פון דעם אָקטאַעדער זיינען די שניטפּינטלעך פון די דיאגא־נאלן פון די זעקס ווענטלעך פון דעם קוב. א אקטאעדער קען אויך גע־שאַפן ווערן פון א רעגולערן טעטראעדער, ווען מען צעטיילט אויף העלפט די קאנטן פון דעם טעטראעדער און דורך די מיטנס שניידט מען אַראָפּ קליינע טעטראעדערס. די עקן פון דעם אקטאעדער זיינען די מיטנס פון די זעקס קאנטן פון דעם טעטראעדער.

אייגנשאפטן פון פאראלעלע ליניעס.

§ 29. ווינקלען, וואס ווערן געבילדעט פון א גראָדער מיט א פאר פאראלעלע.

ווען AB און CD זיינען פאראלעל איינע צו דער אנדערער, ליגן זיי, ווי מיר ווייסן, אויף איין פליין. ווען מיר ווען קאנסטרואירן א ראָמב מיט איין זייט אויף AB און מיט איינעם פון זיינע עקן אויף CD, וועט די זייט פון דעם ראָמב, וואס ליגט אנטקעגן זיין זייט אויף AB, ליגן אויף CD. דערפון איז געדרונגען: ווען מיר וועלן פארבינדן צוויי פינטלעך: P אויף AB און Q אויף CD, קען מען אויף PQ קוקן, ווי אויף א דיא־גאנאל פון אזא ראָמב, ווארום מיר קענען קאנסטרואירן אהן א שיעור

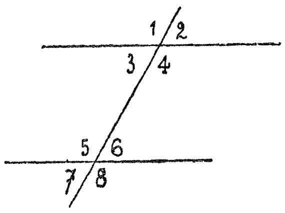


פיג. 110a.

אזעלכע ראָמבען מיט איינעם פון די עקן אין Q; זייערע דיאגאנאלן, וואס גייען פון דעם עק Q צו דעם אנטקעגנדיגן עק, וועלן זיין לויטער שטראלן, וואס גייען ארויס פון Q, און איינער פון די שטראלן מוז זיין QP. אבער, באטראכנדיג QP אלס א דיאגאנאל פון אזא ראָמב, קענען מיר דערפון דריינגען, לויט ווי מיר ווייסן בנוגע א ראָמב, אז די ווינקלען, וואס ער בילדעט מיט די פאראלעלע אויף פארשיידענע זייטן פון PQ זיינען גלייך, ד. ה. אז דער ווינקל QPS איז גלייך דעם ווינקל CQP. די צוויי ווינקלען הייסן ווידעראנאנדיגע ווינקלען, ווייל זייערע לעפצונגען ליגן ווידער־אנאנד, אדער געציינדלטע ווינקלען, מחמת די ציינדלעך פון א זעג בילדן לויטער אזעלכע ווינקלען.

דעם טייל פון דעם פליין, וואס ליגט צווישן צוויי פארעלעלע, רופט מען פאראלעלער פאַס, אדער בקיצור סתם פאַס.

ווען א גראָדע שניידט צוויי פאראלעלע, בילדעט זי מיט זיי 8 ווינקלען, צו 4 ווינקלען ביי יעדן שניטפינטל. זיי ווערן איינגעטיילט אין:


פיג. 110b.

1. אינוויינינגסטע ווינקלען. דאס זיינען די 4 ווינקלען, וואס זייער אינוויי־ניגסטער רוים פארדעקט דעם פּאַס, דהיינו די ווינקלען 3, 4, 5, 6 אויף דער פיג. 110b.

2. דרויסנדיגע ווינקען. דאס זיינען די 4 איבעריגע ווינקלען, וואס זייערע לעפצונגען ליגן דרויסן פון דעם פּאַס, דהיינו די ווינקלען 1, 2, 7, 8.

די ווינקלען, וואס ליגן אויף איין זייט פון דער שניידנדיגער גראָדער, הייסן איינזייטיגע ווינקלען. דאס זיינען די ווינקלען 1, 3, 5, 7 פון איין זייט און די ווינקלען 2, 4, 6, 8 פון דער אנדערער זייט.

צוויי ווינקלען, וואס ליגן אויף אנטקעגנדיגע זייטן פון דער שניידנ־דיגער גראָדער, הייסן אנטקעגנזייטיגע ווינקלען. דאס זיינען די ווינקלען 1 און 2, 1 און 6, 2 און 5, 3 און 8, 3 און 6 א. אזו. וו.

צוויי ווינקלען, וואס זיינען אי אינוויינינגסטע אי איינזייטיגע הייסן אינ־וויינינגסטע איינזייטיגע ווינקלען; דאס זיינען די ווינקלען 3 און 5, 4 און 6.

צוויי ווינקלען, וואס זיינען אי דרויסנדיגע אי איינזייטיגע הייסן דרויסנדיגע איינזייטיגע ווינקלען; דאס זיינען די ווינקלען 1 און 7, 2 און 8.

צוויי ניט שכנישע איינזייטיגע ווינקלען, וואס איינער פון זיי איז א אינ־וויינינגסטער און דער אנדערער א דרויסנדיגער, הייסן שטאפלדיגע ווינקל, ווייל זיי דערמאנען אָן די שטאפלען פון א לייטער. דאס זיינען די ווינקלען 1 און 5, 2 און 6, 3 און 7, 4 און 8.

צוויי ניט שכנישע אינוויינינגסטע, אבער אנטקעגנזייטיגע ווינקלען, הייסן, ווי מיר ווייסן שוין, אינוויינינגסטע ווידעראנאנדיגע ווינקלען. דאס זיינען די ווינקלען 3 און 6, 5 און 4.

צוויי ניט שכנישע דרויסנדיגע אבער אנטקעגנזייטיגע ווינקלען הייסן דרויסנדיגע ווידעראנאנדיגע ווינקלען; דאס זיינען די ווינקלען 1 און 8, 2 און 7.

חוץ דעם זעהסטו אויף דער פיגור שכנישע און אפגעקערטע ווינקלען.

דיזעלביגע גרופעס ווינקלען ווערן געשאפן בכלל, ווען א גראָדע שניידט צוויי אנדערע, אפילו ניט פאראלעלע, גראָדע ליניעס. אבער אין

דער געאָמעטריע קומט דאָס רוב אויס צו ריידן וועגן דעם פאַל פון פאַראַ־לעלע ליניעס.

ווען אַ גראָדע שניידט צוויי פאַראַלעלע ליניעס, דעמאָלט זיינען:

יעדע 2 אינווייניגסטע ווידעראַנאַנדיגע ווינקלען גלייך. דאָס האָבן מיר שוין פריהער געזעהען;

יעדע 2 שטאַפּלדיגע ווינקלען זיינען גלייך, מחמת דער אַפּגעקערטער ווינקל פון איינעם פון זיי בילדעט מיט דעם צווייטן ווידעראַנאַנדיגע ווינקלען, אָבער אַפּגעקערטע ווינקלען זיינען גלייך, און ווידעראַנאַנדיגע ווינקלען זיינען אויך גלייך. למשל ווינקל 2 און ווינקל 6 זיינען שטאַפּל־דיגע ווינקלען. ווינקל 2 איז גלייך ווינקל 3 אַלס אַפּגעקערטע ווינקלען; ווינקל 6 איז גלייך ווינקל 3 אַלס ווידעראַנאַנדיגע ווינקלען. דעריבער איז ווינקל 2 גלייך ווינקל 6.

יעדע 2 דרויסנדיגע ווידעראַנאַנדיגע ווינקלען זיינען גלייך, מחמת זייערע אַפּגעקערטע ווינקלען זיינען אינווייניגסטע ווידעראַנאַנדיגע ווינקלען, ד. ה. גלייכע. באַוויז דאָס.

יעדע 2 אינווייניגסטע איינזייטיגע ווינקלען באַטרעפן צוזאַמען 2 גראָדע ווינקלען. באַוויז דאָס (ראַמבּ!).

יעדע 2 דרויסנדיגע איינזייטיגע ווינקלען באַטרעפן צוזאַמען 2 גראָדע ווינקלען, מחמת זייערע אַפּגעקערטע ווינקלען זיינען אינווייניגסטע איינ־זייטיגע ווינקלען.

איינגיטונגען.

1. AFB און EFG זיינען 2 גראָדע, וואָס שניידן זיך אין F. דורך E און G גייען 2 גראָדע EK און GL, פאַראַלעלע צו AB. ווייז, אַז EK איז פאַראַלעל צו GL.

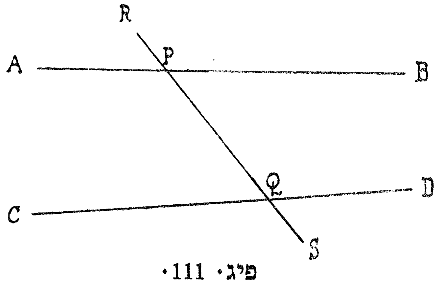
2. ABC איז אַ דרייעק, און D דער מיטן פון AB. ווייז, אַז די פאַראַ־לעלע צו BC דורך D צעטיילט AC אויף העלפט.

*

ווען מיר האָבן צוויי אָפּשניטן AB און CD, וואָס האָבן ניט קיין איין בשותּפותדיגן פּינטל (פיג. 111), און ביידע זיינען דורכגעשניטן דורך אַ גראָדער RS, איז די סומע פון די אינווייניגסטע איינזייטיגע ווינקלען אָדער

גלייך 2 גראָדע ווינקלען אדער גרעסער אדער קלענער פון 2 גראָדע ווינקלען· ווען זי איז גלייך צוויי גראָדע ווינקלען, זיינען די אפשניטן פאראַלעל· ווארום דעמאלט זיינען אי דער ווינקל APQ אי דער ווינקל DQP דערגאנצדיגע ווינקלען פון דעם ווינקעל BPQ, דעריבער זיינען ביידע ערשטע ווינקלען גלייך· אבער זיי זיינען אינוויייניגסטע ווידעראנאנדיגע ווינקלען· און ווען אינווייניגסטע ווידעראנאנדיגע ווינקלען זיינען גלייך, זיינען זייערע ניט בשותפותדיגע זייטן פאראלעל· (דאס האבן מיר באוויזן אין אנהייב פון § 26)·

ווען די סומע איז קלענער פון צוויי גראָדע ווינקלען, זיינען ביידע אנדערע אינווייניגסטע ווינקלען צוזאמען גרעסער פון צוויי גראָדע ווינקלען·



פיג· 111·

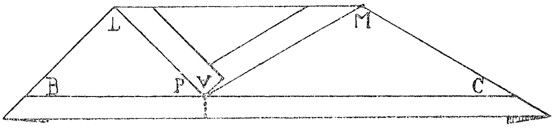
די דורכגעשניטענע גראָדע קענען דעמאלט ניט זיין קיין פאראלעלע, ווארום פאראַלעלע בילדן מיט דער דורכשניידנדיגער גראָדער אינווייניגסטע איינזייטיגע ווינקלען, וואס זייער סומע איז גלייך צוויי גראָדע ווינקלען· לאמיר זאגן, אז די דורכגעשניטענע גראָדע טרעפן זיך אין א פינטל O, דעמאלט איז OPQ א דרייעק· אבער אין א דרייעק איז די סומע פון צוויי ווינקלען קלענער פון צוויי גראָדע ווינקלען· דעריבער מוז דער פינטל O ליגן אויף יענער זייט פון QR, וואו די סומע פון די אינווייניגסטע איינזייטיגע ווינקלען איז קלענער פון צוויי גראָדע· די ה·:

ווען א גראָדע בילדעט מיט צוויי אפשניטן אינווייניגסטע איינזייטיגע ווינקלען, וואס זייער סומע איז ניט גלייך צוויי גראָדע ווינקעלן, דעמאָלט שניידן זיך די צוויי אפשניטן (ווען מען פארלענגערט זיי) אויף יענער זייט פון דער שניידנדיגער גראָדער, וואו די סומע פון די ווינקלען איז קלענער פון צוויי גראָדע ווינקלען·

דאס איז זעהר א וויכטיגע ידיעה, וואס איז באוואוסט אונטער דעם נאמען «עוקלידס זאַץ»· ווען דו וועסט עלטער ווערן, וועסטו דערגיין, אז אהן דעם זאַץ וואלט מען ניט געקענט אויפבויען דעם שיינעם בנין פון דער געאמעטריע· ווי דו זעהסט, איז דער זאַץ א פועל־יוצא פון אונזער

אקסיאמע וועגן פאראלעלע ליניעס; מען קען אבער גיין א אנדער וועג: אננעמען עוקלידס זאַץ פֿאַר א אקסיאמע, און פון אים דערגיין בדרך חקירה צו דעם זאַץ וועגן דער איינציגקייט פון א פאראלעלער. אזוי האט טאקע געטאן עוקליד.

טעארעמע. אין יעדן דרייעק באטרעפן אלע דריי ווינקלען צוזאמען צוויי גראָדע ווינקלען (180°). קנייטש אויס א דרייעק. לכל הפחות צוויי פון זיינע ווינקלען מוזן זיין שמאָלע. זייערע שפּיצן לאמיר אנרופן B און C, און דעם דריטן עק פון דעם דרייעק לאמיר אנרופן A. ווען AP איז דער פערפענדיקולאַר פון A אויף BC, מוז P ליגן צווישן B און C, ווארום ווען P וואלט געלעגן אויף דער פארלענגערונג פון BC, לאמיר זאגן הינטער פון B, וואלט דאך דער ווינקל ABC געווען א דרויסנדיגער ווינקל פאר



פיג. 112.

דעם דרייעק APB (צייכן דאס אויף!), דאס הייסט ער וואלט געווען דיגעסער פון א גראָדן ווינקל, דאס איז אבער סותכ אונזער הנחה, אז דער ווינקל ABC איז א שמאָלער.

לאמיר איצט ארויפלייגן A אויף P, דער קנייטש איז פערפענדיקולאַר צו AP און ער טיילט AP אויף העלפט. אבער ער צעטיילט אויך AB און AC אויף העלפט אין די פינטלעך L און M (זעה איינגיטונג 2, זייט ?141). דאס הייסט:

$$AM = BC, \qquad AL = LB.$$

AL דעקט זיך מיט LP, און AM מיט MP, דאס הייסט:

$$AM = MP, \qquad AL = LP.$$

דעריבער איז אויך LB = LP, און MC = MP, לויט דער באוואוסטער אקסיאמע. דעריבער קענען מיר איינקנייטשן דאס פאפיר פוןביידע זייטן אזוי, אז LB זאל ליגן אויף LP, און B אויף P, און MC אויף MP, און C אויף P. דעמאלט וועט זיך דער ווינקל LBP דעקן מיטן ווינקל LPB, און דער ווינקל MCP מיט דעם ווינקל MPC, אזוי אז אלע דריי ווינקלען

פון דעם דרייעק וועלן באדעקן צוויי גראָדע ווינקלען ביי P, דאס הייסט ביי באטרעפן צוזאמען צוויי גראָדע ווינקלען, און דאס האט געדארפט באוויזן ווערן.

איינניטונגען.

1. באווייז די לעצטע טעארעמע, פירנדיג א פאראלעלע פון A צו BC. ארום A וועלן זיך דעמאלט גרופירן 3 ווינקלען, דער ווינקל A און ד ווידעראנאנדיגע ווינקלען פון B און פון C.

2. איין ווינקל פון א דרייעק האַלט $22^1/_2{}^0$, דער אנדערער 45^0, וויפיל גראַד האלט דער דריטער ווינקל.

3. וויפיל גראַד האלט יעדער ווינקל פון א גלייכזייטיגן דרייעק?

4. קנייטש אויס א ווינקל פון 15^0.

5. קאָנסטרואיר א גראָדווינקלדיגן דרייעק מיט א ווינקל פון 30^0 ביים גרונט. וויפיל גראַד האלט דער דריטער ווינקל?

6. צוויי גראָדע, וואס זיינען פערפענדיקולאַר צו א דריטער, זיינען פאראלעל איינע צו דער אנדערער.

דער גראָדווינקלדיגער דרייעק.

§ 30.

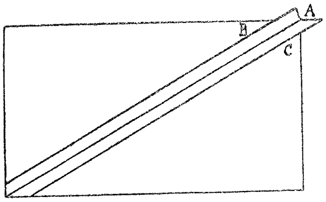
קנייטש אויס צוויי גראָדע AB און AC אונטער א גראָדן ווינקל און א דריטע גראָדע BC, וואס שניידט ביידע ערשטע. ABC איז א גראָדווינקל־דיגער דרייעק. די זייט BC אנטקעגן דעם גראָדן ווינקל הייסט היפאָטענוזע, ביידע אנדערע זייטן הייסן קאַטעטן. היות ווי אלע דריי ווינקלען באטרעפן צוזאמען 180^0, באטרעפן ביידע שמאלע ווינקלען 90^0, מיט אנדערע ווערטער: דער גראָדער ווינקל BAC איז גלייך דער סומע פון ביידע אנדערע ווינקלען פון דעם גראָדווינקלדיגן דרייעק.

אין א גראָדווינקלדיגן דרייעק איז אפט נוצליך אנצונעמען די היפאָטענוזע פאַרן גרונט, און ממילא דעם אנטקעגנדיגן עק פאַרן שפיץ פון דעם דרייעק. דאס איז אָבער ניט קיין כלל.

היות ווי די ווינקלען B און C זיינען צוזאמען גלייך דעם ווינקל A, קענען זיי ביידע צוזאמען באדעקן דעם ווינקל A.

ווען O איז דער מיטן פון BC, איז דער פערפענדיקולאַר פון O צו AB פאראלעל צו AC (איינניטונג 6, זייט 144) און צעטיילט AB אויף העלפט

(איינגיטונג 2, זייט 141). ווען מיר מאכן א קנייטש, ארויפלייגנדיג B אויף A, גייט דער קנייטש אַדורך אויף דורכן מיטן פון AB און איז אויך פערפענדיקולאַר צו AB, דעריבער מוז ער דורכגיין דורך O, און דערביי דעקט זיך OA מיט OB (פיג. 113).



פיג. 113.

צוליב דעמזעלביגן טעם קען מען ארויפקנייטשן C אויף A, און דעמאָלט וועט OC ליגן אויף OB, הייסט דאס, OC און OA ליגן הארט איינע לעבן דער אנדערער (זיי פארשמעלצן זיך), און ביידע שמאָלע ווינקלען פון דעם דרייעק דעקן דערביי דעם גראָדן ווינקל. דערפון דרינגען מיר:

ווען O איז דער מיטן פון דער היפּאָטענוזע BC פון א גראַדווינקלדיגן דרייעק ABC, איז OA = OB = OC, און O איז דער צענטער פון דעם ראָד, וואס גייט דורך A, B און C, און וואס זיין דיאַמעטער איז BC.

איינגיטונגען.

1. ווייז, אז דער דרויסנדיגער ווינקל פון א דרייעק איז גלייך דער סומע פון די צוויי אינווייניגסטע ווינקלען, ניט שכנישע מיט אים.

2. מיט דער הילף פון דער איינגיטונג (1) ווייז, אז א דרייעק איז א גראַדווינקלדיגער, ווען איינער פון זיינע ווינקלען איז גלייך דער סומע פון ביידע אנדערע.

3. ווייז, אז די גראָדע, וואס פארבינדט דעם שפּיץ פון דעם גראָדן ווינקל פון א גראַדווינקלדיגן דרייעק מיט דעם מיטן פון דער היפּאָטענוזע, צעטיילט דעם גראָדן ווינקל אויף צוויי טיילן, וואס איינער פון זיי איז גלייך איין שמאָלן ווינקל פון דעם דרייעק, און דער אנדערער דעם צווייטן שמאָלן ווינקל פון דעם דרייעק (דער דרייעק ווערט צעשניטן אויף צוויי גלייכאקסלדיגע דרייעקן).

4. ווייז, אז יעדער דרייעק, א איינגעשריבענער אין א ראָד, איז א גראַדווינקלדיגער, ווען איין זייט זיינע איז דער דיאַמעטער.

5. ווייז, אז די מעדיאַנע אין א ניט גראַדווינקלדיגן דרייעק, ד. ה. דער אָפּשניט, וואס פאַרבינדט דעם שפּיץ פון דעם דרייעק מיט דעם מיטן פון דעם גרונט, איז אדער קלענער אדער גרעסער ווי די העלפט פונם

גרונט, ווענדט זיך אָן דעם, צי דער ווינקל ביים שפיץ איז א ברייטער אדער א שמאָלער.

6. ווייז, אז דער פערפענדיקולאַר פון דעם שפיץ פון דעם גראָדן ווינקל פון א גראָדווינקלדיגן דרייעק צו דער היפּאָטענוזע צעטיילט דעם דרייעק אויף צוויי דרייעקן, וואס אין יעדערן פון זיי זיינען די ווינקלען גלייך די ווינקלען פון דעם גרויסן דרייעק.

7. אין א גראָדווינקלדיגן דרייעק זיינען פון דעם שפיץ פון דעם גראָדן ווינקל אראפּגעלאָזן דער פערפענדיקולאַר צו דער היפּאָטענוזע און די מעדיאַנע צו דער היפּאָטענוזע. ווייז, אז דער ווינקל צווישן איין קאַטעט און דעם פערפענדיקולאַר איז גלייך דעם ווינקל צווישן דעם צווייטן קאַטעט און דער מעדיאַנע. [דערצו דארפסטו ווייזן, אז יעדער פון די צוויי ווינקלען איז גלייך דעם ווינקל צווישן דעם צווייטן קאַטעט און דער היפּאָטענוזע. צייכן אויף אזא דרייעק מיט דעם פערפענדיקולאַר און מיט דער מעדיאַנע, דערנאָך מאַך צוויי קאָפּיעס פון אים: איינע אהן דעם פערפענדיקולאַר, די אנדערע אהן דער מעדיאנע; דעמאלט וועלן די ליניעס ניט שטערן דיין אויג].

דער פערפענדיקולאַר און די מעדיאנע הייסן איזאָגאָנאַלע (איזאָס = גלייך, גאָני = ווינקעל) צונויפגעשפּאַנטע ליניעס (זעה ווייטער).

8. ווייז, אז א גראָדווינקלדיגער דרייעק, אין וועלכן איין ווינקעל איז גלייך 45°, איז א גלייכאקסלדיגער.

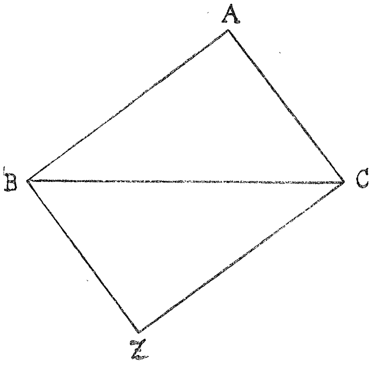
דער שטח פון א גראָדווינקלדיגן דרייעק און פון א גראָדעק.

§ 31. דער שטח פון א גראָדווינקלדיגן דרייעק.

קגייטש אויס א גראָדווינקלדיגן דרייעק ABC. קגייטש אויס אין די עקן B און C פון דער היפּאטענוזע צוויי גראָדע, פערפענדיקולארע צו די קאַטעטן.

זיי וועלן זיך שניידן אין Z אויף דער אנדערער זייט פון BC. אזוי ווי ZC און BA זיינען ביידע פערפענדיקולאר צו AC, זיינען זיי פאראלעלע ליניעס, און דעריבער איז די סומע פון די ווינקלען CZB און ABZ

גלייך 180°; אבער דער ווינקל ABZ איז גלייך 90°, דעריבער איז אויך דער ווינקל CZB גלייך 90°· די פיגור ABZC איז א גראַדעק (פיג· 114)· דער ווינקל CBZ איז גלייך דעם ווינקל ACB, אלס ווידער־אנאנדיגע ווינקלען פון די פאראַ־לעלע ZB און CA, וואס זיינען פאַ־ראלעל, מחמת זיי זיינען ביידע פערפענדיקולאר צו AB· דער ווינקל BCZ איז גלייך דעם ווינקל ABC, אלס ווידעראנאנדיגע· אזוי ארום איז דער דרייעק ABC געגליכן דעם דרייעק ZBC אין דער בשות־פותדיגער זייט BC און אין צוויי ביילינגדיגע ווינקלען. דעריבער זיינען ביידע דרייעקן קאנגרועַנט, און זייערע שטח׳ס זיינען גלייך, און יעדערער פון זיי איז גלייך א העלפט פון דעם גראַדעק ABZC·

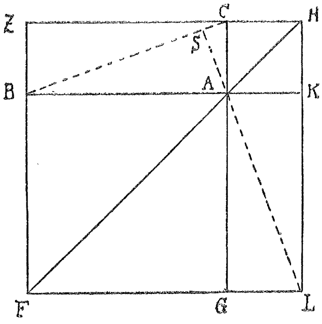


פיג· 114·

דער שטח פון א גראַדווינקלדיגן דרייעק איז די העלפט פון דעם שטח פון א גראַדעק, וואס זיינע שכנישע זייטן זיינען די קאַטעטן פון דעם דרייעק·

דער שטח פון א גראַדעק·

לאמיר נעמען דעם גראַדעק ABZC (פיג· 115)· לייג ארויף BA אויף דער פארלענגערונג פון CA, אויסקנייטשנדיג דעם ביסעקטאָר פון די שכנישע ווינקלען פונם גראַדן ווינקל BAC· דער קנייטש וועט שניידן די פארלענגערונג פון ZB אין F און די פארלענגערונג פון CZ אין H· קנייטש אויס פערפענדיקולארן צו ZF און צו ZH אין F און אין H· די פערפענדיקולארן שניידן זיך אין L· זאל LH שניידן די פארלענגערונג פון BA אין K, און FL זאל שניידן די פארלענגערונג פון CA אין G (פיג· 115)· דו קענסט לייכט באווייזן, אז



פיג· 115·

די דרייעקן BAF, ZHF און CAH זיינען גלייכאַקסלדיגע גראָדווינקלדיגע דרייעקן (איינגיטונג 8 זייט 146), און אזי, ביים איינקנייטשן דאס פאפיר פאזע FH, וועט FZ באדעקן FL, און HZ וועט באדעקן HL, AB וועט זיך דעקן מיט AG, און AC מיט AK·

אויף אזא אופן דעקט זיך דער דרייעקן ZHF מיט דעם דרייעקן LHF· יעדער פון זיי איז א העלפט פון דעם פירעק ZFLH· אבער, אזוי ווי א גלייכאַקסלדיגער גראָדווינקלדיגער דרייעק איז א העלפט פון א קוואדראט, דעריבער איז ZFLH א קוואדראט·

פונקט אזוי זיינען ABFG און ACHK קוואדראטן·

די זייטן פון די לעצטע צוויי קוואדראטן זיינען די זייטן פון דעם גראָדעק·

די זייט פון דעם גרויסן קוואדראט ZFLH איז די סומע פון די שכנישע זייטן פון דעם גראָדעק, ווארום BF און BA זיינען גלייך, אלס זייטן פון דעם קוואדראט ABFG, און $FZ = BF + BZ$, דעריבער איז $FZ = AB + BZ$·

לאמיר אננעמען, אז BZ האלט 1 סאנטימעטער, און AB האלט 2 סאנטימעטער, דעמאלט האלט FZ 3 סאנטימעטער· דעריבער האלט דער קלענסטער קוואדראט 1 qcm, דער גרעסערער 4 qcm און דער גרעסטער 9 qcm, ווי מיר האבן פריהער געלערנט·

איצט קנייטש איין דאס פאפיר איבעראנייס פאזע HF; דו זעהסט, אזביידע גראָדעקן ABZC און AGKL דעקן זיך, ד· ה· זיי זיינען קאנגרועינט·

ווייטער, ווען מען נעמט אראָפּ פון דעם גרויסן קוואדראט ביידע קליינע קוואדראטן, באקומט מען ביידע קאנגרועינטע גראָדעקן· בכן איז דער שטח פון ביידע קאנגרועינטע גראָדעקן, אדער – וואס דאס איז אלץ איינס – דער טאפעלער שטח פון דעם גראָדעק ABZC, גלייך דעם אונטערשייד צווישן דעם שטח פונם גרויסן קוואדראט, דעם אויפגעבויטן אויף דער סומע פון די אומגלייכע זייטן פון דעם גראָדעק, און צווישן דער סומע פון די שטח'ס פון די צוויי קליינע קוואדראטן, די אויפגעבויטע אויף די אומגלייכע זייטן פון דעם גראָדעק[1]·

[1] אנשטאט צו זאגן: «א קוואדראט, וואס איז אויפגעבויט אויף א זייט אדער אויף א סומע פון זייטן», זאגט מען בקיצור: «א קוואדראט אויף א זייט אדער אויף א סומע פון זייטן», מען זאגט אויך: «א קוואדראט פון א זייט», אבער דעמאלט פערשטייט מען אונטער קוואדראט די מאס, ניט די פיגור·

דער קוואדראט אויף דער סומע פון די אומגלייכע זייטן ווייניגער צוויי קוואדראטן, צו איינעם אויף יעדער אומגלייכער זייט איז דער טאפעלער גראָדעק.

מיט אנדערע ווערטער: דער שטח פון א גראָדעק איז גלייך דער העלפט פון דעם אונטערשייד צווישן דעם קוואדראט אויף דער סומע פון זיינע אומגלייכע זייטן און צווישן דער סומע פון די קוואדראטן אויף זיינע אומגלייכע זייטן.

אויף אזא אופן קען מען פארגלייכן דעם שטח פון א גראָדעק מיט דעם שטח פון קוואדראטן. מיר האבן שוין געלערנט, אז דעם שטח פון קוואדראטן קען מען אויסמעסטן אין סאנטימעטערס, דעריבער קען מען דעם שטח פון גראָדעקן אויך אזוי אויסמעסן.

אנגעמענדיג פאר די זייטן פון דעם גראָדעק די צאלן, וואס מיר האבן פריהער געגעבן, באקומען מיר:

1. דער גרעסטער קוואדראט האט א שטח פון 9 qcm
2. דער קלענסטער קוואדראט: 1 qcm
דער גרעסערער קוואדראט: 4 qcm
צוזאמען 5 qcm
3. דער טאפעלער גראָדעק האט א שטח פון 4 qcm

דער גראָדעק האלט א העלפט דערפון, דאס הייסט 2 qcm

אזוי ווי דער שטח פון א גראָדווינקלדיגן דרייעק איז גלייך דער העלפט פון דעם שטח פון א געוויסן גראָדעק, קען מען אויך דעם שטח פון א גראָדווינקלדיגן דרייעק אויסמעסטן אין קוואדראטסאנטימעטערס.

ווען מיר ווילן וויסן דעם שטח פון א גראָדעק, דארף מען אפריהער אויסרעכענען די שטח'ס פון יענע דריי קוואדראטן, חבורן די קלענערע צאלן, די סומע אראפנעמען פון דער גרעסערער צאל, און דעם אונטערשייד טיילן אויף העלפט. עס איז אבער דא א לייכטערער מיטל: מען כופלט די לענג פון ביידע אומגלייכע זייטן פון דעם גראָדעק. אין אונזער משל וועט ארויסקומען: $2 \times 1 = 2$. דער שטח פון דעם גראָדעק איז גלייך 2 qcm. עס איז שווער צו באווייזן דעם לעצטן כלל שטרענג, דו מוזט שוין האבן געדולד, ביז דו וועסט עלטער ווערן, אבער דער כלל איז ריכטיג.

איינניטונגען.

1. ווייז אויף דער פיגור 115, אז AL איז פערפענדיקולאר צו BC (פגל. איינניטונג 7, זייט 146).

2· ווייז, אז, ווען מען פירט פון א פינטל A פון דעם דיאַגאָנאַל פון א קוואדראט צוויי פאראלעלע צו די צוויי זייטן פון דעם קוואדראט, ווערט דער קוואדראט צעטיילט אויף צוויי קוואדראטן און אויף צוויי קאנגרועגטע גראָדעקן (פיג· 115)·

3· ווען מען שטעלט אויף צו BC אויף דער פיגור 115 צוויי פערפענ־דיקולארן BX און CY, וואס שניידן LF און LH אין X און Y, איז BCXY א קוואדראט· דערווייז דאָס (BX און CY זיינען פאראלעל און גלייך AL)·

4· אין א געגעבענעם קוואדראט שרייב אריין א קוואדראט, וואס איין עק זיינער זאל ליגן אויף א געגעבענעם פינטל פון איין זייט פון דעם געגעבענעם קוואדראט· (פיג· 115· ווען B איז דער געגעבענער פינטל, לייג אָפּ ZC גלייך BF· C איז דער צווייטער עק פון קוואדראט· פגל· איינבינדונג 3)·

פיטאַגאָראַס'ס טעארעמע·

§ 32. די היפאטענוזע·

וועלכע זייט פון א גראָדווינקלדיגן דרייעק איז די גרעסטע? די היפאָ־טענוזע, ווייל זי ליגט אנטקעגן דעם גרעסטן ווינקל· אבער מיר ווייסן, אז די היפאטענוזע איז קלענער ווי די סומע פון די קאטעטן, דעריבער איז לויט § 15 דער קוואדראט אויף דער היפאטענוזע קלענער ווי דער קוואד־ראט אויף דער סומע פון די קאטעטן· די פיגור 115, ווייטער, ווייזט דיר קלאָר, אז די סומע פון די קוואדראטן אויף די קאטעטן איז קלענער ווי דער גרויסער קוואדראט אויף דער סומע פון די קאטעטן· די פיגור 116 ווייזט דיר בולט, אז דער קוואדראט פון דער היפאטענוזע איז קלענער ווי יענער גרויסער קוואדראט· (אויף פיג· 116 איז דער גרויסער קוואדראט געמאכט געווארן גלייך דעם גרויסן קוואדראט פון פיג· 115, און BC איז אויך גלייך BC פון פיג· 115·)

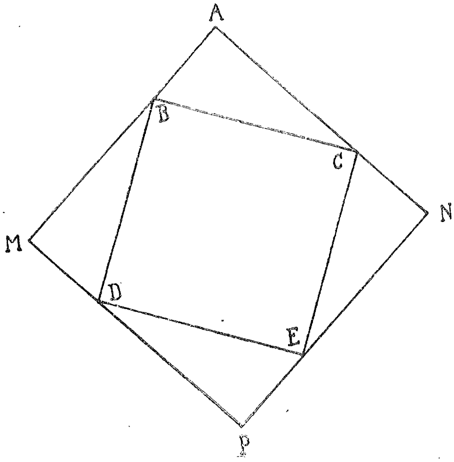
פיגור 115: די צוויי קליינע קוואדראטן צוזאמען זיינען קלענער ווי דער גרויסער קוואדראט·

פיגור 116: דער אריינגעשריבענער קוואדראט איז קלענער ווי דער גרויסער (דער ארומגעשריבענער)·

מיר וועלן באלד זעהען, אז אין אמתן איז דער אריינגעשריבענער קוואדראט פון דער פיגור 116 גלייך ביידע קליינע קוואדראטן פון דער פיגור 115.

טעאָרעמע: אין א גראָדווינקלדיגן דרייעק איז דער קוואדראט אויף דער היפאטענוזע גלייך דער סומע פון די קוואדראטן אויף די קאטעטן.

קנייטש אויס א דרייעק ABC מיט א גראָדן ווינקל אין A, מיט פארלענגערטע קנייטשן פון AB און AC. קנייטש אויס דעם קוואדראט BCED; מאך דורך D און E קנייטשן, פערפענדיקולארע צו די גראָדע AB און AC, וועסטו באקומען די פיגור AMPN. עס איז לייכט איינצוזעהען, אז די 4 גראָדווינקלדיגע דרייעקן מיט די שפיצן A, M, P און N זיינען קאנגרוענט, דעריבער זיינען די זייטן AM, MP, PN און NA גלייך, און די פיגור AMPN איז א קוואדראט, וואס יעדע זייט זיינע איז גלייך דער סומע פון די קאטעטן פון אונזער דרייעק ABC. דערפון איז געדרונגען:



פיג. 116.

דער קוואדראט BCED אויף דער היפאטענוזע צוזאמען מיט דעם פירפאכיגן שטח פון דעם דרייעק איז גלייך דעם קוואדראט AMPN אויף דער סומע פון די קאטעטן.

אָבער מיר ווייסן, אז דער טאפעלער שטח פון א גראָדווינקלדיגן דרייעק איז גלייך דעם שטח פון א גראָדעק, וואס זיינע אומגלייכע זייטן זיינען די קאטעטן פון דעם דרייעק, דעריבער איז דער פירפאכיגער שטח פון אָטדעם דרייעק גלייך דעם טאפעלן שטח פון דעמזעלביגן גראָדעק, (מיר וועלן אים אָנרופן «אונזער גראָדעק»). דערפון איז געדרונגען:

דער קוואדראט אויף דער היפאטענוזע צוזאמען מיט
דעם טאפעלן שטח פון אונזער גראָדעק איז גלייך
דעם קוואדראט אויף דער סומע פון די קאטעטן·

מיר ווייסן אבער וועגן דעם שטח פון א גראָדעק, אז
די סומע פון די קוואדראטן אויף די אומגלייכע זייטן, אדער
די סומע פון די קוואדראטן אויף די קאטעטן צוזאמען מיט
דעם טאפעלן שטח פון דעם גראָדעק איז גלייך
דעם קוואדראט אויף דער סומע פון די קאטעטן·

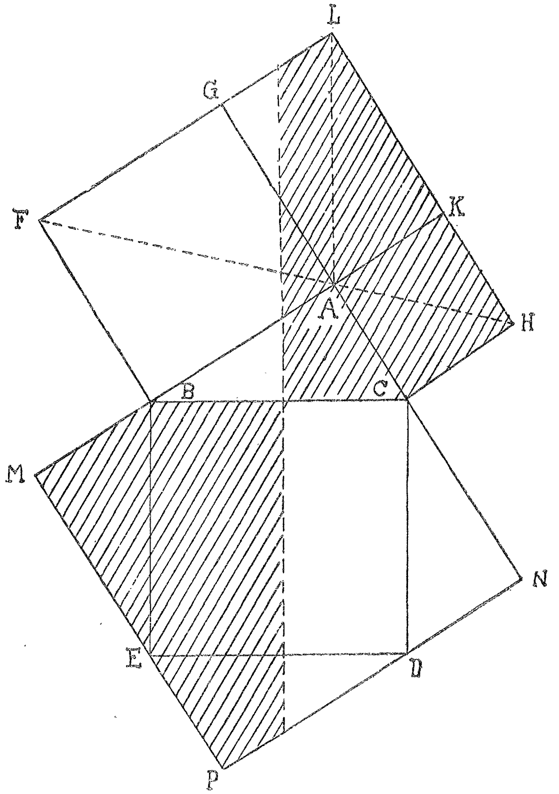
איז דאך קלאָר, אז דער קוואדראַט אויף דער היפאטעוזע איז גלייך דער סומע פון די קוואדראטן אויף די קאטעטן· און דאס האט געדארפט באוויזן ווערן· די טעארעמע איז באוואוסט אונטער דעם נאָמען «פיטא־גאָראס׳ס טעארעמע», אדער «פיטאגארעאישע טעארעמע»·

די פיגור 117 ווייזט, וויאזוי מען דאַרף קנייטשן דאס פאפיר, כדי בולט צו ווייזן די ריכטיגייט פון דער טעארעמע· די פיגור פאראייניגטביידע פיגורן 115 און 116· דער דרייעק ZBC איז אויף דער צייכנונג ניטאָ, כדי ער זאל ניט שטערן די אויגן· דעם טייל איבער BC קען מען באדעקן מיט דעם טייל אונטער BC אזוי, אז די גלייך באפארפטע[1]) טיילן זאלן זיך דעקן· אמבעסטן טוט מען אזוי: נעם א בלאַט פאפיר, וואס איז גע־ווירעט אין קוואדראטישע קעסטלעך· דו קענסט זיך דאסמאל פערלאָזן, אז דאס זיינען זעהר גענויע קוואדראטן· צייכן אויף א גראָדווינקלדיגן דרייעק ABC, נעמענדיג, למשל, 6 קעסטלעך אין דער ברייט פאר איין קאַטעט AB און 4 קעסטלעך אין דער לענג פאר דעם אנדער קאטעט AC· זאל AB ליגן לינקס פון A אויף דיין בלאַט, און AC אַראָפצו· די לענג פון ביידע קאטעטן איז גלייך דער לענג פון 10 זייטן פון די קעסטלעך· צייל איצט אפ צו 10 קעסטלעך לינקס פון A און אַראָפצו פון A און צייכן אויף די אפשניטן BM און CN· פון M צייכן א גראָדע פאזע דער ליניע פונם פאפיר אַראָפצו, און פון N לינקס· די גראָדע וועלן זיך שניידן אין P· דו באקומסט דעם קוואַדראט AMPN· איצט פיר אַדורך פאזע דער ליניע פונם פאפיר דורך B א גראָדע אינדער־לענג און דורך C אינדערברייט· זיי וועלן זיך שניידן אין Z· צייל אפ

---

[1]) אנשטאט פארשיידענע פארבן איז איין טייל פון דער צייכענונג 117a ווייס, דער אנדערער געשטריכלט·

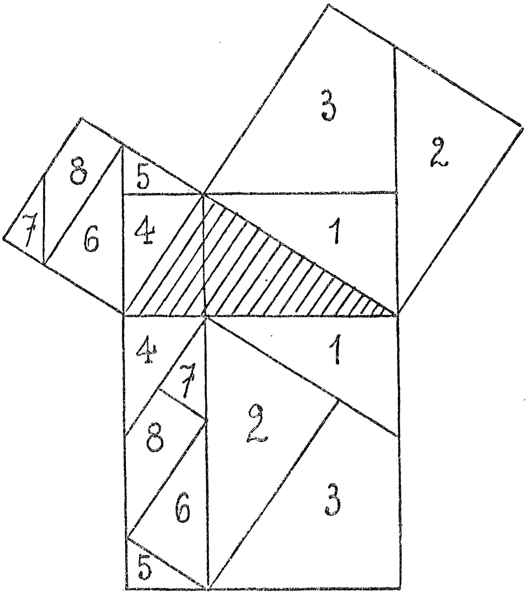
צו 10 קעסטלעך אויף יעדערער פון זיי, אנהייבנדיג פון Z, באקומסט דו די אָפשניטען ZF און ZH· פון H און פון F פיר פאראלעלע צו ZF און צו ZH, וואס וועלן זיך שניידען אין L· דו באקומסט דעם קוואדראט ZFLH·



פיג· 117a·

דו זעהסט, אז די זייט פון איינעם פון די צוויי קוואדראטען איז גלייך דער זייט פון דעם צווייטען· אַזויווי אלע ווינקלען פוןביידע קוואַ־דראטען זיינען גראָדע ווינקלען, קען מען אין די געדאנקען ארויפלייגן איין קוואדראט אויף דעם אנדערן אזוי, אז זיי זאָלן זיך דעקן, אדער מען קען צוגרייטען איין קאָפיע פון ביידע קוואדראטען אויף א באזונדערן

שטיק פאפיר און באדעקן מיט דער קאפיע יעדערן פון זיי· דאס הייסט אבער׳ אזביידע קוואדראטן זיינען קאנגרועטנט און זיי האבן גלייכע שטח׳ס· דו קענסט אויך לייכט באווייזן׳ אז די דרייעקן ABC און ZBC זיינען קאנגרועטנט; בכן האבן זיי אויך גלייכע שטח׳ס· אראפנעמענדיג פון דעם אויבערשטן קוואדראט דעם דרייעק ZBC באקומט מען די פיגור איבער BC׳ אראפנעמענדיג פון דעם אונטערשטן קוואדראט דעם דרייעק



פיג· 117b·

ABC באקומט מען די פיגור אונטער BC· ביידע פיגורן האבן׳ אויפן יסוד פון דעם׳ וואס מיר האבן פריהער געפונען׳ גלייכע שטח׳ס· דאס הייסט נאך ניט׳ אז זיי זיינען קאנגרועטנט· אבער מיר וועלן באלד זעהען׳ אז זיי זיינען עס· שנייד אויס די גאנצע פיגור· צעטייל BC אויף העלפט· ארויפלייגנדיג B אויף C· ווערט BC ארויפגעקנייטשט אויף זיך גופא׳ און דער קנייטש איז דער מיטלסטער פערפענדיקולאר צו BC· איצט באַ־ פארב דיין פיגור מיט צוויי פארבן׳ ווי אויף דער פיגור 117a געלב און בלוי· צעשנייד די פיגור דורך BC· איצט לייג ארויף דעם אויבערשטן טייל

אויף דעם אונטערשטן אזוי, אז די ניט באַפאַרבטע זייטן פון דיין פּאַפיר זאָלן איןביידע טיילן ליגן אויף אונטן, און אז דער פּינטל F זאל ליגן אויף דעם פּינטל N און FB אויף NC, וועסטו זעהען, אז די אויבערשטע פיגור דעקט זיך מיט דער אונטערשטער. פאַרוואס איז דאס אזוי? דאס איז לייכט צו באווייזן לאגיש. אזוי ווי FB = NC, וועלן זיי זיך דעקן, און דער פּינטל B פון דעם אויבערשטן טייל וועט ליגן אויף דעם פּינטל C פון דעם אונטערשטן טייל. אזוי ווי די ווינקלען F און N זיינען גלייך, וועלן זיי זיך דעקן, און FL וועט ליגן אויף NP; אזוי ווי די ביידע זייטן זיינען גלייך, וועט L ליגן אויף P; אזוי ווי די ווינקלען L און P זיינען גלייך, וועט LH ליגן אויף PM; אזוי ווי די ביידע זייטן זיינען גלייך, וועט H ליגן אויף M; צוליב דעמזעלביגן טעם וועט HC ליגן אויף MB, און C פון אויבן אויף B פון אונטן[1]). ווייבאַלד B פון אויבן ליגט אויף C פון אונטן, און C פון אויבן אויף B פון אונטן, מוז BC פון אויבן ליגן אויף CB פון אונטן. ווי דו זעהסט האט זיך די פיגור אונטער BC פולקום געדעקט מיט דער פיגור איבער BC, ד. ה. ביידע פיגורן זיינען קאָנגרועגט. בשעת דו האסט באדעקט איין פיגור מיט דער אנדערער, האט זיך BC געדעקט מיט CB און ממילא דער מיטן פון BC מיט דער מיטן פון CB. דער מיטלסטער פּערפּענדיקולאַר צו BC איז אויף אזא אופן, ווי דו זעהסט אויך, ארויפגעקנייטשט געווארן אויף זיך גופא, אזוי אז די געלע פיגור דעקט זיך מיט דער געלער, די בלויע מיט דער בלויער.

(דו קענסט, ניט דורכשניידנדיג די פיגור דורך BC, אויך באדעקן די איינצלנע טיילן אויף דעמזעלביגן אופן, איינקנייטשנדיג אפריהער פאַזע BC און דערנאָך אין דעם מיטלסטן פּערפּענדיקולאַר. די וועסט לייכט דערקענען די קאנגרועגטקייט פון די גלייך געפאַרבטע פיגורן, אבער צווישן יעדע צוויי גלייכפאַרביגע בלעטלעך וועט ליגן א בלעטל פון דער אנדערער פאַרב, וועלכע דו וועסט מוזן אביסל פאַרשטעקן, כדי קלאָרער צו זעהען. פּראָביר דאס.)

איצט נעם די אונטערשטע פיגור, צייכן אויף איר צוויי פּערפּענדיקולאַרן צו BC אין B און אין C, וואס וועלן שניידן PN אין D און PM אין E. פערבינד D מיט E. אויף דער אויבערשטער פיגור פאַרלענגער CA און BA, וואס וועלן שניידן FL און HL אין G און K. פאַרבינד A מיט L.

[1]) ד. ה. פון דער אויבערשטער פיגור (איבער BC) און פון דער אונטערשטער פיגור (אונטער BC).

לייג צוריק צונויף ביידע העלפטן פון דער גאַנצער פיגור. (אויב דו קענסט, פאַרקלעפ זיי פון אונטן). דו קענסט לייכט באַווייזן, אַז BCDE איז אַ קוואַדראַט, און אַז די דרייעקן ABC, MEB, NCD און PDE זיינען קאָנגרועַנט. נאָך לייכטער קענסטו באַווייזן, אַז די דרייעקן ABC, GLA און KLA זיינען קאָנגרועַנט. אויף אַזאַ אופן זיינען אַלע אויפגעציילטע דרייעקן אויף דער אויבערשטער און אונטערשטער פיגור קאָנגרועַנט, ווייל זיי זיינען אַלע קאָנגרועַנט דעם דרייעק ABC.

ווען מיר וועלן פון דער אויבערשטער פיגור אַראָפּנעמען די דריי דרייעקן ABC, GLA און KLA, וואָס וועט בלייבן?

צוויי קוואַדראַטן אויף די קאַטעטן.

ווען מען וועט פון דער אונטערשטער פיגור אַראָפּנעמען אויך דריי דרייעקן MEB, PDE און NCD, דאָס הייסט דעמזעלביקן שטח, וואָס פון דער אויבערשטער, וואָס וועט בלייבן?

דער קוואַדראַט אויף דער היפּאָטענוזע.

מיר האָבן פון גלייכע שטח'ס (פון די צוויי קאָנגרועַנטע פיגורן) אַראָפּגענומען גלייכע שטח'ס (צו דריי קאָנגרועַנטע דרייעקן פון יעדער), בכן זיינען געבליבן אויך גלייכע שטח'ס, ד. ה. אַז דער שטח פון די צוויי קוואַדראַטן אויף די קאַטעטן (וואָס איז געבליבן אויבן) איז גלייך דעם שטח פון דעם קוואַדראַט אויף דער היפּאָטענוז (וואָס איז געבליבן אונטן).

לאָמיר זיך אומקערן צו דער פיגור. צוליינגנדיג לעבן די צוויי קוואַד־ראַטן אויבן און לעבן דעם קוואַדראַט אונטן צו דריי קאָנגרועַנטע דרייעקן, באַקומען מיר איבעראַנייס די צוויי קאָנגרועַנטע פיגורן אויבן און אונטן. געדענק: מיר בקומען ניט בלויז פיגורן מיט גלייכע שטח'ס, נייערט אויך קאָנגרועַנטע. דאָז איז אַ סך מער. פרעגט זיך איצט: צי זיינען די צוויי קוואַדראַטן אויף די קאַטעטן קאָנגרועַנט דעם קוואַדראַט אויף דער היפּאָטענוזע? מיט אַנדערע ווערטער: צי קען מען די צוויי קוואַדראַטן אויף די קאַטעטן צעשניידן אויף שטיקלעך אַזוי, אַז, אַרויפלייגנדיג די שטיקלעך אין אַ באַשטימטן סדר אויף דעם קוואַדראַט אויף דער היפּאָטענוזע, זאָלן מיר אים פולקום באַדעקן? מען קען דאָס; אָבער עס איז זעהר שווער. די פיגור 117a ווייזט דיר, ווי מען מאַכט דאָס, אָבער פאַרוואָס דאָס איז אַזוי, קענסטו נאָך ניט פאַרשטיין.

איינגיטונגען.

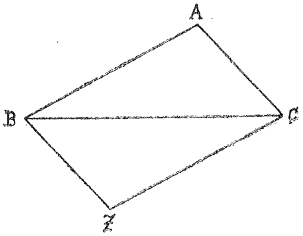
1. ווייז און באווייז, אז, ווען מען פארלענגערט אויף פיגור 117a EB, ביז איר שניטפינקטל X מיט FL, און DC ביז איר שניטפינקטל Y מיט HL, איז BXYZ א קוואדראט.

2. ווייז און באווייז, אז AL אויף פיגור 117a איז פערפענדיקולאר צו BC.

פאַראַלעלאָגראַמען.

§ 33. דעפיניציע פון א פאַראַלעלאָגראַם; זיינע אייגנשאפטן.

ווען דו האסט א דרייעק ABC און דו פירסט דורך B און C פאראלעלע צו AB און AC, וועלן זיי זיך שניידן אויף דער זייט פון BC, וואס ליגט אנטקעגן A, ווייל די ווינקלען, וואס זיי בילדן מיט BC אויף אטדער זייט, זיינען ווידעראנאנדיגע ווינקלען צו די ווינקלען B און C פון דעם דרייעק ABC, דעריבער מאכן זיי אויס צוזאמען ווייניגער פון 180°. זאל זייער שניטפינקטל הייסן Z. דער דרייעק ZBC איז קאנגרועט דעם דרייעק ABC, ווייל זיי זיינען געגליכן אין דער בשותפותדיגער זייט BC און אין צווי ביילינגדיגע ווינקלען. דער אינווייניגסטער רוים פוןביידע דרייעקן צואמען גיט א טייל פונם פליין, וואס איז אפגעגרעניצט פון דעם איבעריגן פליין דורך די פיר אפשניטן AB, BZ, ZC, CA (פיג. 118). <u>די פיר אָפשניטן בילדן א פירזייטיגע פיגור, וואס די אנטקעגנדיגע זייטן אירע זיינען פאראלעלי.</u> די פיגור הייסט <u>פאַראַלעלאָגראַם</u> («גראַמאַ» הייסט אויף גריכיש א ליניע).



פיג. 118.

פון דער קאנגרועטקייט פון ביידע דרייעקן איז געדרונגען, אז <u>די אנטקעגנדיגע זייטן פון א פאַראַלעלאָגראַם זיינען גלייך.</u>

דער אינווייניגסטע רוים פון דעם פאַראַלעלאָגראַם הייסט זיין שטח, און מען זאגט, אז דער שטח איז איינגעשלאסן אין דער ראם פון דעם פאַראַלעלאָגראַם, אדער ער איז באגרעניצט דורך דער ראַם.

דער שטח פון א פאַראַלעלאָגראַם איז ממילא צוויי מאָל אזוי גרויס, ווי דער שטח פון יעדערן פון די דרייעקן, אויף וועלכע דער דיאגאנאל צעטיילט אים.

די ווינקלען פון א פאַראַלעלאָגראַם זיינען די (איינגעפאלענע) ווינקלען צווישן די גראָדע, וואס בילדן זיינע זייטן. דער אינווייניגסטער רוים פון א פאַראַלעלאָגראַם ליגט אין דער לעפצונג פון יעדן ווינקל זיינעם.

עס איז לייכט צו זעהען, אז די אנטקעגנדיגע ווינקלען פון א פאַראַ־לעלאָגראַם זיינען גלייך; די ווינקלען פון א פאַראַלעלאָגראַם, וואס ליגן אויף איין זייט, זיינען דערגאנצנדיגע ווינקלען.

די ליניעס AZ און BC זיינען די דיאגאנאלן פון דעם פאַראַלעלאָגראַם.

א דיאגאנל טיילט דעם פאַראַלעלאָגראַם אויף צוויי קאנגרועטע דרייעקן.

וועגן דעם דיאַגאָנאַל BC ווייסן מיר דאס שוין, וועגן דעם צווייטן דיאַגאָנאַל קען מען עס לייכט באווייזן: די דרייעקן, אויף וועלכע ער צעטיילט דעם פאַראַלעלאָגראַם זיינען געגליכן אין אלע דריי זייטן.

ווען איין ווינקל פון א פאַראַלעלאָגראַם איז א גראָדער ווינקל, זיינען אלע ווינקלען זיינע גראָדע ווינקלען, און דער פאַראַלעלאָגראַם איז א גראָדעק.

א גראָדעק איז א ספעציעלער פאַל פון א פאַראַלעלאָגראַם; ער איז א פרט פון א פאַראַלעלאָגראַם, פונקט ווי א קוואדראט איז א פרט פון א ראָמב.

איינניטונגען.

1. ווען די דיאגאנאלן פון א פאַראַלעלאָגראַם זיינען גלייך, איז דער פאַראַלעלאָגראַם א גראָדעק.

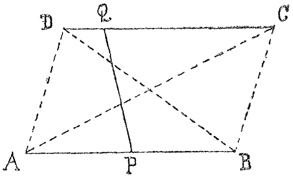
2. די דיאגאנאלן פון א פאַראַלעלאָגראם שניידן זיך אין זייערע מיטנס.

3. דער גרעסערער דיאגאנאל פון א פאַראַלעלאָגראַם פארבינדעט די שפיצן פון די שמאלע ווינקלען זיינע.

4. ווען צוויי דרייעקן ABC און ZBC ליגן אויף אנטקעגנדיגע זייטן פון BC, און AB=ZC, AC=BZ, איז ABZC א פאַראַלעלאָגראַם (די דרייעקן ABC און ZBC זיינען קאנקרועגט, ווייל זיי זיינען געגליכן אין אלע דריי זייטן; דעריבער זיינען די ווינקלען ABC און ZCB גלייכע ווידעראנאנדיגע ווינקלען).

נעם א פּאָר גלייכע און פּאַראַלעלע אפשניטן· נעם א פּינטל P אויף איינעם פון זיי און א פּינטל Q אויף דעם אנדערן (פיג· 119)· ביידע עקן פון די אפשניטן לינקס פון PQ רוף אָן A און D, רעכטס B און C· די פּאַראַלעלע אפשניטן, הייסן AB און DC· מען קען פארבינדן די פיר פּינטלעך A, B, C, D דורך פיר אנדערע אפשניטן, דהיינו AC, AD, BC, BD·

פון אטדי פיר ליניעס האט DA אזא לאגע, אז B און C ליגן אויף דערזעלביגער זייט פון איר, ווארום ביידע פּינטלעך ליגן רעכטס פון QP, אינדערצייט ווען AD ליגט לינקס פון PQ·



פיג· 119·

צוליב דעמזעלביגן טעם ליגן A און D אויף דערזעלביגער זייט פון BC· אבער AC האט אזא לאגע, אז ביידע איבעריגע פּינטלעך ליגן יעדערער אויף א אנדער זייט פון איר· ווארום אזוי איז DCA א דרייעק, איז די סומע פון זיינע צוויי ווינקלען DAC און ADC קלענער פון 180°, ד·ה· קלענער פון דער סומע פון די צוויי אינווייניגסטע איינזייטיגע ווינקלען DAB און ADC· דעריבער איז דער ווינקל DAC קלענער ווי דער ווינקל DAB, ד·ה· CA ליגט אינווייניג אין דעם ווינקל DAB און טיילט אפּ B פון D· צוליב דעמזעלביגן טעם, ליגט BD צווישן C און A·

דאס אלץ זעהסטו קלאר אויף דער פיגור· אבער דאס הייסט נאך ניט, אז אזוי מוז עס זיין אויף יעדער פיגור· דעריבער האבן מיר דאס געמוזט באווייזן לאגיש, און דער באווייז הענגט ניט אָפּ פון דער צופעליגקייט פון דער פיגור· וואס מיר האבן באנוצט די ווערטער רעכטס און לינקס, איז קיין פגימה ניט; מיר האבן דאס געטאן בתכלית הצמצום·

מיר זעהען: ווען צוויי אפשניטן, וואס פארבינדן צוויי פּאָר פּינטלעך, זיינען גלייך און פּאַראַלעל, זיינען צווישן אלע מיגליכע 6 אפשניטן, דורך וועלכע די פּינטלעך קענען פארבונדן ווערן, פארהאן צוויי, און בלויז צוויי, וואס ליגן צווישן די צוויי פּינטלעך, וואס זיי פארבינדן ניט·

טעאָרעמע· ווען AB און CD זיינען גלייכע און פּאַראַלעלע אפשניטן, און AD און BC זיינען אפשניטן, וואס פארבינדן צוויי עקן פון יענע פּאַראַלעלע אפשניטן, ניט ליגנדיג צווישן די אנדערע צוויי עקן, איז ABCD א פּאַראַלעלאָגראַם·

פיר אדורך (פיג. 119) AC. AC ליגט צווישן B און D. דעריבער זיינען BAC און DCA ווידעראנאנדיגע, בכן גלייכע ווינקלען. אבער AB=CD, און AC איז א בשותפותדיגע זייט פוןביידע דרייעקן BAC און CAD, זיינען דאך ביידע דרייעקן געגליכן אין צוויי זייטן און דעם ווינקעל צווישן זיי, דעריבער זיינען זיי קאנגרועגט. דעמאלט זיינען אבער די ווינקלען DAC און ACB גלייך, און דעריבער איז AD פאראלעל צו BC, ד. ה. ABCD איז א פּאַראַלעלאָגראַם. און דאס האט געדארפט באוויזן ווערן (אדהגב"ו).

דער שטח פון פּאַראַלעלאָגראַמען און פון דרייעקן. מיר האבן געזעהען, אז דער שטח פון א דרייעק איז די העלפט פון דעם שטח פון א געוויסן פּאַראַלעלאָגראַם. די קומענדיגע טעאָרעמע ווייזט, אז דער שטח פון א פּאַראַלעלאָגראַם קען אויסגעמאסטן ווערן, ווייל ער איז גלייך דעם שטח פון א געוויסן גראָדעק.

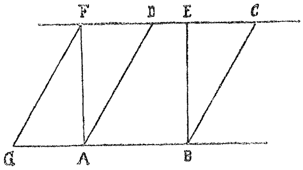
אַפריהער וועלן מיר זיך אפריידן, אז איינע פון די זייטן פון א פּאַראַלעלאָגראַם אדער פון א פּרט פון א פּאַראַלעלאָגראַם וועלן מיר אננעמן פארן גרונט זיינעם. וועלכע זייט מיר קלייבן אויס, איז אלץ איינס. דאס איז ניט מער, ווי א שאלה פון באקוועמליכקייט.

ווען די גרונטן פון צוויי פּאַראַלעלאָגראַמען ליגן אויף איינער פון צוויי פאראלעלע, און די אנטקעגנדיגע זייטן פון די גרונטן פון ביידע פּאַראַלעלאָגראַמען ליגן אויף דער צווייטער פאראלעלע, זאגט מען, אז ביידע פּאַראַלעלאָגראַמען ליגן צווישן דיזעלביגע פאראלעלע.

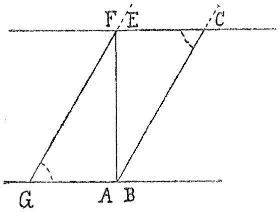
טעאָרעמע. דער שטח פון א פּאַראַלעלאָגראַם איז גלייך דעם שטח פון א גראָדעק מיט א גלייכן גרונט און צווישן דיזעלביגע פאראלעלע.

קנייטש אויס א פּאַראַלעלאָגראַם ABCD. דורך A און דורך B פיר צוויי פערפענדינקולארן צו AB; זיי זיינען ממילא פערפענדיקולאר צו CD. לאמיר באצייכענען זייערע שניטפינטלעך מיט CD מיט די אותיות E און F. אין דעם פּאַראַלעלאָגראַם ABCD איז AB=CD, און אין דעם גראָדעק ABEF איז AB=EF, דעריבער איז: AB=DC=EF. דעריבער מוז לכל הפחות איינער פון די פינטלעך E און F ליגן דרויסן פון דעם אפּשניט CD, ווארום, ווען זיי וואלטן ביידע געלעגן אויף דעם אפשניט CD, ד. ה. צווישן די פינטלעך D און C, וואלט EF געווען קלענער ווי DC.

איך האב געזאָגט: «לכל הפחות», ווייל עס קען געמאלט זיין, אז אי E אי F וועלן ליגן דרויסן פון CD· זאל F זיין דער פינטל דרויסן פון CD (אדער — אין דעם צווייטן מיגליכן פאל — דער פינטל, וואס שטייט אָפּ ווייטער פון C)· פיר אדורך דורך F א פאראלעלע FG צו AD; ממילא איז זי אויך פאראלעל צו CB· קנייטש איין דאס פאפיר אזוי, אז B זאל ליגן אויף A, דעמאלט וועט E ליגן אויף F· איצט קנייטש אָפּ אָנאַזייט דעם דרייעק CEB פּאַזע EB, אזוי אז די דרייעקן CEB און GAF וועלן ליגן אויבענויף איינער נעבן דעם אנדערן· זיי בילדן צוזאמען א פּאַראַ־לעלאָגראַם· פארוואס? ווייל GA איז פערפּענדיקולאר צו AF· ווייטער, EC איז פערפּענדיקולאר צו EB, אבער EB דעקט זיך דאך איצט מיט AF: דעריבער איז איצט אויך CE פערפּענדיקולאר צו AF, און דעריבער איז



פּיג· 120·



פּיג· 121·

CE פאראלעל צו GA· ווייטער איז דער ווינקל C גלייך דעם ווינקל G, אלס אנטקעגנדיגע ווינקלען פון דעם פּאַראַלעלאָגראַם GBCF, אבער דער ווינקעל G איז דאך גלייך זיין ווידעראנאנדיגן ווינקל ביי F, איז דאך אטדער ווינקל ביי F גלייך דעם ווינקל C; דאס הייסט, EG און BC בילדן מיט EC גלייכע שטאפּלדיגע ווינקלען, דעריבער איז EG פאראלעל צו BC·
אבער, ווען די אנטקעגנדיגע זייטן פון דעם פירעק GFCB (פּיג· 121) זיינען פּארעלעל, איז GFCB א פּאַראַלעלאָגראַם, און דער דרייעק CEB איז קאנגרועגט דעם דרייעק GAF, אלס העלפטן פון דעם פּאַראַלעלאָגראַם (פּיג· 121)· אבער דער דרייעק GAF בילדעט אויך א פּאַראַלעלאָגראַם מיט דעם דרייעק FAD (אויף דעם פּאַרדעקטן פאפּיר), דעריבער זיינען אלע דריי דרייעקן GAF, ADF און CEB קאנגרועגט·

ווען דו וועסט אויסגלעטן דיין פּאפּיר און ארונטערקנייטשן ביידע ערשטע דרייעקן פאראמאל, וועסטו באַקומען דעם פּאַראַלעלאָגראם ABCD·

ווען דו וועסט אויף דער אויסגעגלעטער פיגור ארונטערקנייטשן די זייטיגע דרייעקן, וועסטו באקומען דעם גראָדעק ABEF.

פון איין און דעמזעלביגן שטח האסטו ביידע מאל אראפגענומען א גלייכן שטח (פון צוויי קאנגראענטע דרייעקן), זיינען דאך ביידע מאָל איבערגעבליבן אויכעט גלייכע שטח'ס, דאס הייסט, אז דער שטח פון דעם פאַראַלעלאָגראַם ABCD איז גלייך דעם שטח פון דעם גראָדעק ABEE. אדהגב"ו.

איינניטונגען.

1. צייכן אויף צוויי פאראלעלע. צווישן זיי צייכן אויף א פאַראַלעלאָגראַם ABCD און א גראָדעק $A_1B_1C_1D_1$ מיט גלייכע גרונטן. B און D זיינען די עקן פון די ברייטע ווינקלען. פיר אדורך דורך B א פערפענדיקולאר צו CD; ער וועט שניידן CD אין E. דער פאַראַלעלאָגראַם איז איצט צעטיילט אויף צוויי טיילן: אויף דעם דרייעק EBC און דעם פירעק ADEB. שנייד אָפּ דעם דרייעק און באדעק מיט ביידע טיילן דעם גראָדעק (צולייגנדיג EBC מיט דער זייט BC צו דער זייט AD פון דעם פירעק ADEB).

2. ווייז, אז פאַראַלעלאָגראַמען אויף דעמזעלביגן גרונט (אדער אויף גלייכע גרונטן) און צווישן דיזעלביגע פאראלעלע האבן א גלייכן שטח.

3. באווייז, אז דרייעקן אייף דעמזעלביגן גרונט (אדער אייף גלייכע גרונטן) און צווישן דיזעלביגע פאראלעלע האבן א גלייכן שטח.

הערה: מען זאגט, אז א דרייעק ליגט צווישן צוויי פאראלעלע, ווען דער גרונט פון דעם דרייעק ליגט אויף איינער פון די פאראלעלע, דער שפיץ אויף דער אנדערער.

ווען מען לאזט אַראָפּ א פערפענדיקולאר פון דעם שפיץ פון א דרייעק צו דעם גרונט פון דעם דרייעק, הייסט דער טייל פון דעם פערפענדיקולאר, וואס ליגט צווישן דעם שפיץ און דעם גרונט, די הייך פון דעם דרייעק.

ווען מען פירט א פערפענדיקולאר צום גרונט פון א פאַראַלעלאָגראַם, הייסט דער אפשניט פון דעם פערפענדיקולאר, וואס ליגט אין דעם פאראלעלן פאַס, די הייך פון דעם פאַראַלעלאָגראַם.

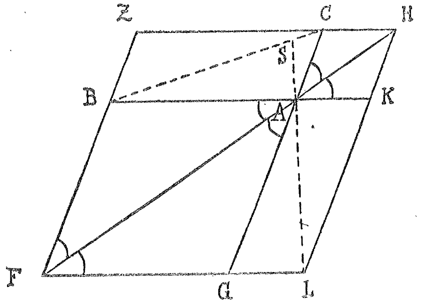
באנוצנדיג די נייע טערמינען, קענען מיר אויסדריקן אונזערע ידיעות וועגן דעם שטח פון פאַראַלעלאָגראַמען און פון דרייעקן בזה הלשון:

1. דער שטח פון א פאַראַלעלאָגראַם איז גלייך דעם שטח פון א גראָדעק מיט א גלייכן גרונט און א גלייכער הייך.

2. דער שטח פון א דרייעק איז גלייך א האלבן שטח פון א גראָדעק מיט דעמזעלביגן גרונט און דערזעלביגער הייך.

צעטיילונג פון א ראָמב אויף צווי קליינע ראָמבן און צווי פאַראַלעלאָגראַמען. אויף דער פיגור 115 האבן מיר געזעהען, אז א קוואדראט קען צעטיילט ווערן אויף צווי קליינע קוואדראטן און צווי גראָדעקן דורך צווי פאראלעלע צו זיינע זייטן, וואס גייען אדורך דורך דעם פינטל A פון דעם דיאגאנל פונם קוואדראט. פונקט אזוי לאָזט זיך א ראָמב צעטיילן אויף צווי קליינע ראמבן און צווי פאַראַלעלאָ־גראַמען.

טעאָרעמע. די סומע פון די שטח'ס פון צווי ראמבן מיט דיזעל־ביגע ווינקלען און פון א טאפעלן פאַראַלעלאָגראַם מיט די זייטן פון אטדי צווי ראָמבען און מיט דיזעלביגע ווינקלען איז גלייך דעם שטח פון א ראָמב מיט דיזעלביגע ווינקלען, וואָס יעדע זייט זיינע איז גלייך דער סומע פון די צוויי זייטן פון די ערשטע צוויי ראמבן (פיג. 122a).

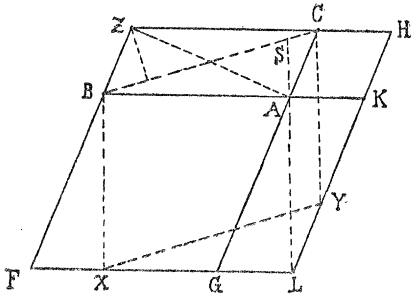


פיג. 122a.

דער באווייז פון דער טעארעמע איז אַנאַלאָג דעם באווייז פאר א קוואד־ראט (פיג. 115). דער דיאגאנאל FAH פון דעם גרויסן ראָמב טיילט זיינע ווינקלען אויף העלפט און בילדעט גלייכע ווידעראנאנדיגע ווינקלען מיט די זייטן פון דעם ראָמב און מיט זייערע פאראלעלע BAK און CAG. דעריבער

זיינען אלע אכט ווינקלען, וואס זיינען אָפּמארקירט אויף דער פיגור, גלייך. דערפון דרינגעט מען, אז BAF און CAH זיינען גלייכאקסלדיגע דרייעקן.

ווען מיר קנייטשן איין דאס פאפיר פּאַזע FH, דעקט זיך Z מיט L, B מיט G, C מיט K. דעריבער זיינען ABZC און AGLK קאנגרועגטע



פיג. 122b.

פּאַראַלעלאָגראַמען. BFGA און CAKH זיינען ראָמבן אויף די זייטן פון די פּאַראַלעלאָגראַמען.

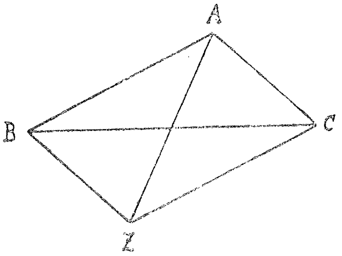
ווייטער: די סומע פון די שכנישע זייטן פון יעדן פּאַראַלעלאָגראַם איז פונקט אזוי גרויס ווי די לענג פון דער זייט פון דעם גרויסן ראָמב. ווארום $BA = BF$, אלס זייטן פון איין ראָמב, אזוי אז $ZF = ZB + AB$. דער ווייטערדיגער באווייז איז לייכט.

צונויפגעשפּאַנטע דרייעקן.

§ 43. דעפיניציע און קאָנסטרוקציע.

עס איז געגעבן א דרייעק. לאמיר אויסקלייבן לויט געלוסט איין זייט זיינע BC פארן גרונט, דעם אנטקעגנדיגן עק פארן שפּיץ פון דעם דרייעק. מיר האבן געזעהען, אז אזא דרייעק איז די העלפט פון א געוויסן פּאַראַ־לעלאָגראַם) מיטן דיאַגאָנאַל BC. ווען דער צווייטער דיאַגאָנאַל איז AZ (פיג. 123), איז דער דרייעק ABZ אויך די העלפט פון דעם־זעלביגן פּאַראַלעלאָגראַם. דער דרייעק ABZ איז בלויז דעמאָלט קאנגרועגט דעם דרייעק ABC, ווען דער פּאַראַלעלאָגראַם איז א גראָדעק, ד. ה. ווען דער ווינקל ביי A איז א גראָדער ווינקל. ווען דער דרייעק ABC איז

געגעבן, איז שוין דערמיט געגעבן הן דער גאנצער פּאַראַלעלאָגראַם והן דער דרייעק ABZ· מען זאגט: דער דרייעק ABC באשטימט א פּאַראַלעלאָגראַם· מען זאגט: דער דרייעק ABC באשטימט דעם דרייעק ABZ· פונקט אזוי איז, פארקערט, דער דרייעק ABC באשטימט דורך דעם דרייעק ABZ· אזעלכע צוויי דרייעקן רופט מען צונויפגעשפּאַנטע דרייעקן (קאָניוגירטע)·



פיג· 123·

צוויי ניט קאנגרועטע דרייעקן, ABC און ABZ, וואס יעדער פון זיי באשטימט דעמזעלביגן פּאַראַלעלאָגראַם, הייסן צונויפגעשפּאַנטע דרייעקן· אויך יעדער דריטער דרייעק, וואס איז קאנגרועט איינעם פון די צוויי דרייעקן, איז א צונויפגעשפּאנטער מיט דער צווייטן דרייעק· צוויי צונויפגעשפּאנטע דרייעקן זיינען שטענדיג געגליכן אין צוויי זייטן זייערע, אבער די דריטע זייטן זייערע זיינען ניט גלייך· ווארום AB איז א בשותפותדיגע זייט פוןביידע, און AC = BZ, אבער AZ איז קלענער פון BC· די ניט גלייכע זייטן פון צונויפגעשפּאַנטע דרייעקן רופט מען צונויפגעשפּאַנטע גרונטן·

ווען עס איז געגעבן א דרייעק, און עס ווערט געפאדערט צו קאנסטרואירן א צונויפגעשפּאנטן דרייעק, קען מען באקומען בכלל דריי דרייעקן, ווענדט זיך, וועלכע זייט מען קלייבט אויס פארן גרונט· ווען דער דרייעק איז א גלייכזייטיגער, זיינען אלע דריי דרייעקן קאנגרועט·

איינגיטונגען·

1· עס איז געגעבן א דרייעק ABC און אַ אפשניט גלייך AC· קאנסטרואיר אויף דעם אפשניט צוויי דרייעקן אויף ביידע זייטן פון אים אזוי, אז יעדער דרייעק זאל האבן צוויי זייטן גלייך BC און AC און א שטח, א געגליכן דעם שטח פון דעם דרייעק ABC (AC איז זייער בשותפותדיגע זייט)· ווייז, אז איינער פון די דרייעקן איז קאנגרועט צו ABC און דער צווייטער איז א צונויפגעשפּאנטער מיט אים·

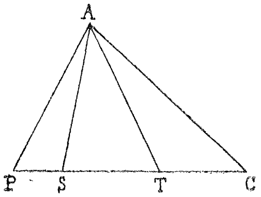
2· עס איז געגעבן א דרייעק ABC (פיג· 122) מיטן גרונט AC· BA איז פארלענגערט ביז K, CA ביז G, BAGF און CAKH זיינען ראָמבן,

FG און HK ווערן פערלענגערט און שניידן זיך אין L· ווייז, אז די דרייעקן LKA און LAG זיינען צונויפגעשפּאַנט מיט דעם דרייעק ABC, און אז BC און AL זיינען צונויפגעשפּאַנטע גרונטן·

איזאָגאָנאַלע צונויפגעשפּאַנטע ליניעס·

§ 35. מיטגייענדיגע ליניעס·

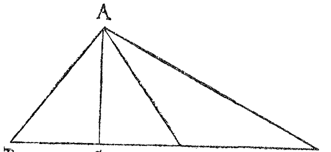
אין דעם דרייעק APC איז BC אויסגעקליבן פאַרן גרונט, A איז דער שפּיץ (פיג· 124)· אין דעם דרייעק ווערט דורכגעפירט א גראָדע AT, וואס פערבינדט דעם שפּיץ מיט א פינטל T פון דעם גרונט· עס איז פאַר־האַן א גראָדע AS, און בלויז איינע אזעלכע, וואס פאַרבינדט דעם שפּיץ A מיט א פינטל S פון דעם גרונט אַזוי, אז דער ווינקל צווישן איר און AP איז גלייך דעם ווינקל צווישן AT און AC· און, פאַר־קערט, צו דער גראָדער AS, וואס ליגט אונטער א געגעבענעם ווינקל צו AB, איז פאַרהאַן א גראָדע AT, און בלויז איינע אזעלכע, אונטער דעמזעלביגן ווינקל צו AC·



פיג· 124·

AT באַשטימט AS, און AS באַשטימט AT·

צוויי גראָדע, וואס פאַרבינדן דעם שפּיץ פון א דרייעק מיטן גרונט זיינעם אזוי, אז די ווינקלען, וואס זיי בילדן מיט די זייטן פון דעם ווינקל ביים שפּיץ, זיינען גלייך, הייסן איזאָגאָנאַלע צונויפגעשפּאַנטע ליניעס· דער טערמין קלינגט שווער· מיר וועלן אים אָפּט פאַרבייטן מיט דעם טערמין «מיט־גייענדיגע ליניעס»·



פיג· 125·

ווען ABC איז א דרייעק און T דער מיטן פון דעם גרונט BC (פיג ·125), הייסט AT די מעדיאַנע פון BC, אדער די מעדיאַנע דורך A· ווען דער ווינקל ביים שפּיץ A איז א גראָדער, איז דער ווינקל SAB, וואס איז גלייך דעם ווינקל TAC, גלייך דעם ווינקל TCA (§ 31) און בילדעט צוזאַמען מיט דעם ווינקעל SBA א גראָדן ווינקל· דעריבער איז דער דרייעק SBA א גראָדווינקלדיגער און AS איז דער פערפענדיקולאַר פון A צו BC·

די מיטגייענדיגע ליניע AS פון דער מאַדיאַנע פון דער היפּאָטענוזע פון אַ גראַדווינקלדיגן דרייעק איז דער פּערפּענדיקולאַר פון A צו דער היפּאָטענוזע.

איינניטונג.

ווייז, אַז, ווען די מעדיאַנע AT און דער פּערפּענדיקולאַר AS צו דעם גרונט BC פון דעם דרייעק ABC זיינען מיטגייענדיגע ליניעס, איז דער דרייעק אַ גראַדווינקלדיגער.

די סינמעדיאַנע. די מיטגייענדיגע ליניע צו דער מעדיאַנע הייסט סינמעדיאַנע (סין הייסט אויף גריכיש מיט). צווישן דער סינמעדיאַנע פון אַ ניט־גראַדווינקלדיגן דרייעק און צווישן דעם פּערפּענדיקולאַר אויף דער היפּאָטענוזע פון אַ גראַדווינקלדיגן דרייעק געפינט מען אָפט שיינע אַנאַלאָגיעס, ווי מען זעהט, פאַרגלייכנדיג די פאָלגנדיגע איינניטונגען מיט די איינניטונגען צום סוף פון § 31.

איינניטונגען.

1. ווייז און באַווייז, אַז אויף פיגור 122 איז AL צונויפגעשפּאַנט מיט דעם גרונט BC פון דעם דרייעק ABC, און אַז די פאַרלענגערונג פון AL איז די סינמעדיאַנע דורך A (פאַרגלייך ביידע פּאַראַלעלאָגראַמען).

2. ווייז אויף פיגור 122, אַז די סינמעדיאַנעס דורך A און Z צו דעם בשותּפותדיגן גרונט BC פון די דרייעקן ABC און ZBC זיינען פּאַראַלעל.

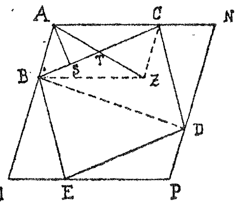
3. ווייז, אַז, ווען BX און BY זיינען פּאַראַלעל צו דער סינמעדיאַנע דורך A צו BC אויף פיגור 122, און זיי שניידן LF און LH אין X און Y, איז BCYX אַ פּאַראַלעלאָגראַם, און זיינע שכנישע זייטן זיינען צונויפ־געשפּאַנטע גרונטן.

4. שרייב אַריין אין אַ געגעבענעם ראָמב אַ פּאַראַלעלאָגראַם, וואָס איינער פון זיינע עקן אויף איינער פון דעם ראָמבס זייטן איז געגעבן, און וואָס זיינע שכנישע זייטן זיינען צונויפגעשפּאַנטע גרונטן פון די דרייעקן, וואָס דער פּאַראַלעלאָגראַם שניידט אָפּ פון דעם ראָמב. ווייז, אַז די ווינקלען פון דעם ראָמב זיינען גלייך די ווינקלען, וואָס די סינמעדיאַנע פון איינעם פון די דרייעקן בילדעט מיטן גרונט.

די איינניטונג 4 איז אַנאַלאָג צו דעם, וואָס מיר האָבן געזעהען אויף דער פיגור 116. דאַמאָלס האָבן מיר געהאַט צו טאָן מיט אַ פּרט פון דער

פּראָבלעמע: דער ראמב איז געווען א קוואדראט· די אפגעשניטענע דרייעקן זיינען דארטן געווען גראדווינקלדיגע, אזוי אז די צונויפגעשפּאנטע גרונטן זיינען געווען גלייך, און דער פּערפּענדיקולאר האט זיך געדעקט מיט דער סינמעדיאנע· באנוצנדיג דיזעלביגע אותיות, וואס אויף דער פיגור 116, קענען מיר מבאר זיין דעם כלל אויף דער פיגור 126·

ווען B איז דער געגעבענער עק, מוזן מיר אפּמעסטן AC גלייך BM און געפינען די פּינטלעך E און D, אפּלייגנדיג ME = PD = AB· דעמאלט איז דער דרייעק PED קאנגרוענט דעם דרייעק ABC, און קען ארויפ־געלייגט ווערן אויף אים, ווען מען קנייטשט איין דאס פּאפּיר פּאזע די דיאגאנאלן BD און CE· די דרייעקן MBE און NCD זיינען צונויפגעשפּאנט מיט דעם דרייעק ABC, ווארום ביידע זייטן, וואס שניידן זיך אין די עקן M און N פון דעם ראָמב, זיינען גלייך AB און AC, און די ווינקלען M און N זיינען דערגאנצנדיגע ווינקלען פון דעם ווינקל A· דעריבער זיינען BE און CD צונויפגעשפּאנטע גרונטען מיט BC, בכן איז BE = CD· דערפון



פיג· 126·

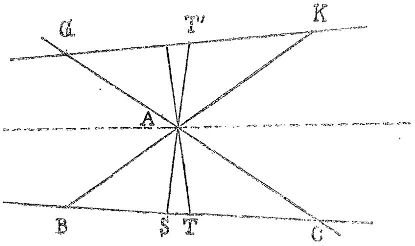
קען מען לייכט דרינגען (פגל· § 23, איינגיטונג 3), אז BCDE איז א פּאַראַלעלאָגראַם· ווארום, ווען מען פירט BD, זיינען די דרייעקן CBD און EBD קאנגרוענט, ווייל זיי זיינען געגליכן אין אלע דריי זייטן, דעריבער זיינען די ווינקלען CBD און EDB גלייך; דערפון איז גע־דרונגען אז BC און DE זיינען פּאראלעל· צוליב דעמזעלביגן טעם זיינען BE און CD פּאראלעל, אזוי אז BCDE איז א פּאַראַלעלאָגראַם, וואס זיינע זייטן זיינען צונויפגעשפּאנטע גרונטן פאר די דרייעקן, וואס ליגן אין די עקן פון דעם ראָמב·

כדי צו ווייזן, אז די ווינקלען פון דעם פּאַראַלעלאָגראַם זיינען דיזעלביגע, ווי די ווינקלען צווישן BC און דער סינמעדיאנע צו BC, פיר CZ און BC פּאראלעל צו AB און AC, כדי צו באקומען דעם פּאַראַלעלאָגראַם ABZC· דעמאלט איז AZ די מעדיאנע דורך A· דער דרייעק MBE און דער דרייעק AZC זיינען ביידע צונויפגעשפּאנט מיט דעם דרייעק ABC בנוגע דעם גרונט BC· דעריבער זיינען זיי קאנגרוענט, און די ווינקלען EBM און ZAC זיינען גלייך· אבער דער ווינקל ZAC איז גלייך דעם ווינקל, וואס די סינמעדיאנע AS בילדעט מיט AB, ד· ה· דעם

ווינקל SAB. דעריבער איז דער ווינקל EBM גלייך דעם ווינקל SAB, און BE איז פאראלעל צו AS, ווי אויך CD; דער ווינקל CBE איז גלייך דעם ווינקל BSA, און, אזוויוי די ווינקלען פון א פּאַראַלעלאָגראַם זיינען דערגאנצנדיגע ווינקלען, איז דער ווינקל BCD גלייך דעם ווינקל ASC; בכן זיינען די ווינקלען פון דעם פּאַראַלעלאָגראַם גלייך די ווינקלען, וואס די סינמעדיאנע AS בילדעט מיט BC.

אויפגאָב (פּראבלעמע).

אויסקנייטשן (אדער צייכענען) א סינמעדיאנע. קנייטש אויס א דרייעק ABC מיט פארלענגערטע זייטן (איבער A אריבער). קנייטש איין דאס פאפיר פאזע דעם ביסעקטאר פון דעם דרויסנדיגן ווינקל ביי A (פיג. 127, פונקטיר), און קנייטש אפ דאס אויבערשטע בלעטל פאזע BC; די פינטלעך פון דעם צווייטן קנייטש, וואס דעקן זיך מיט B און C, רוף אן G און K.



פיג. 127.

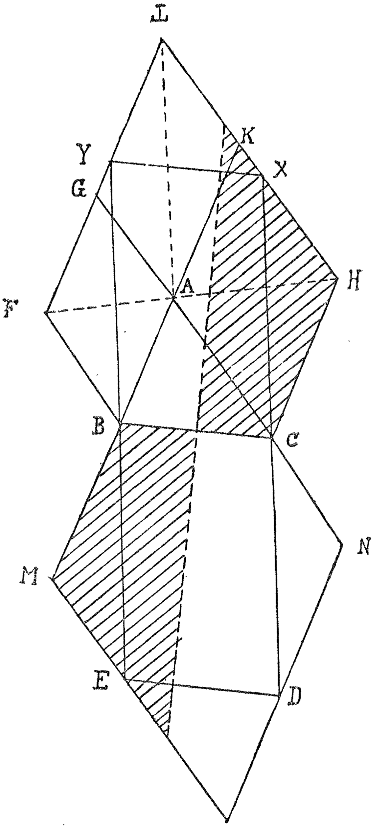
גלעט אויס דאס פאפיר. צעטייל GK אויף העלפט אין T¹, ארויפלייגנדיג K אויף G. מאך א קנייטש דורך T¹ און S, וואס שניידט BC און S. AS איז די סינמעדיאנע.

באווייז: קנייטש איין דיין פאפיר אין דעם ערשטן קנייטש, אזוי אז GK וועט ליגן אויף BC און T¹ וועט זיך דעקן מיט דעם מיטן פון BC אין T. אזוי ארום דעקט זיך AT¹ מיט דער מעדיאנע AT פון BC, און דער ווינקל KAT¹ מיט דעם ווינקל CAT, דאס הייסטביידע ווינקלען זיינען גלייך. גלעט אויס דיין פאפיר. דו זעהסט, אז KAT¹ איז א אפגעקערטער ווינקל פון BAS, דאס הייסט, אז דער ווינקל KAT¹ איז גלייך דעם ווינקל SAB; דעריבער איז דער ווינקל BAS גלייך דעם ווינקל CAT, און, אזוויוי AT איז די מעדיאנע צו BC, איז AS די סינמעדיאנע.

מען צייכנט די סינמעדיאנע אזוי: אויף דער פערלענגערונג פון CA לייגט מען אפ AG גלייך AB, און אויף דער פערלענגערונג פון BA לייגט

מען אפ AK גלייך AC. מען פארבינדט K מיט G. מען געפינט דעם מיטן T^1 פון KG און דעם מיטן T פון BC. AT איז די מעדיאַנע צו BC, AT^1 איז די מעדיאַנע צו GK. די פערלענגערונג AS פון דער מעדיאַנע T^1A איז די סינמעדיאַנע. — דער באוויז איז לייכט.

טעארעמע. ווען אויף צוויי זייטן פון א דרייעק זיינען אויפגעבויט ראָמבן מיט דעמזעלביגן ווינקל, ווי דער ווינקל צווישן אטדי זייטן פון דעם דרייעק, איז די סומע פון די שטח'ס פון ביידע ראָמבן גלייך דעם שטח פון דעם פּאַראַלעלאָגראַם, וואס זיינע זייטן זיינען גלייך דעם גרונט פון דעם דרייעק און זיין צונויפגעשפּאנטן גרונט, און זיינע ווינקלען זיינען גלייך די ווינקלען, וואס די סינמעדיאַנע בילדעט מיט דעם גרונט.



פיג. 128.

ווען דער דרייעק איז א גראָד־ווינקלדיגאר, באקומט מען פּיטאגאראס'ס טעארעמע. ווען ניט, באווייזט מען די טעארעמע ענליך, ווי פּיטאגאראס'ס טעארעמע. פיגור 128 איז אַנאַלאָג דער פיגור 117, און מיר באנוצן פאר איר דיזעלביגע אותיות. דער טייל איבער דער ליניע BC באשטייט פון דעם דרייעק ABC, פון צוויי ראָמבען אויף זיינע זייטן און פון דעם פּאַראַלעלאָגראַם AKLG, וואס האט א טאפּעלן שטח לגבי דעם דרייעק ABC. דער אונטערשטער טייל פון דער פיגור (אונטער BC) באשטייט פון די דרייעקן BME און CND, פון דעם דרייעק PDE און פון דעם פּאַראַלעלאָגראַם BCDE. עס איז זעהר לייכט אויסצוקנייטשן די

פיגור, האבעדיג אין זינען, אז BE איז גלייך LA, און ME איז גלייך KL, און דער ווינקל LAH איז גלייך דעם ווינקל CBE· ביים אויסקנייטשן ווערט קלאר, אז די דרייעקן MBE, NCD, GLA און KLA זיינען קאנגרועַנט, און די דרייעקן ABC און PDE זיינען אויך קאנגרועַנט·

איינקנייטשנדיג די פיגור פּאזע BC און פאזע דעם מיטלסטן פּערפּענ־דיקולאר צו BC, באדעקט מען דעם אויבערשטן טייל מיט דעם אונטערשטן אזוי, אז די גלייך באפּארבטע פיגורן דעקן זיך (דערביי ליגט צווישן צוויי גלייך באפּארבטע בלעטלעך א אנדערש באפּארבטע בלעטל, וועלכע מען דארף אפּבייגן, כדי בעסער צו זעהען די דעקונג), ד. ה. זיי זיינען קאנ־גרועַנט און האבן גלייכע שטח׳ס· ווען מיר וועלן פון דעם אויבערשטן טייל אָפּנעמען זיינע דריי דרייעקן, וועלן בלייבן די צוויי ראָמבן; ווען מיר וועלן פון דעם אונטערשטן טייל אָפּנעמען זיינע דרייעקן, וואס זיינען קאנגרועַנט צו די אויבערשטע דריי דרייעקן, וועט בלייבן דער פּאַראַ־לעלאָגראַם· בכן איז די סומע פון די שטח׳ס פוןביידע ראָמבן גלייך דעם שטח פון דעם פּאַראַלעלאָגראַם· אדהגב״ו·

איינגיטונג.

פּאַפּוס׳ס טעארעמע· אויף די זייטן AB און AC פון דעם דרייעק ABC זיינען אויפגעבויט צוויי פּאַראַלעלאָגראַמען (ליאד וועלכע) ABFG און ACHK; די פּארלענגערטע זייטן FG און AK שניידן זיך אין L; אויף די פּארלענגערטע זייטן FG און AK ליגן צוויי פּינטלעך X און Y אזוי, אַז BCXY איז א פּאַראַלעלאָגראַם· ווייזן דורך קנייטשן, אז דער שטח פון דעם פּאַראַלעלאָגראַם אויף BC איז גלייך דער סומע פון די שטח׳ס פון די פּאַראַלעלאָגראַמען אויף AB און AC·

די פיגור דערצו צייכן אזוי: צייכן אויף א דרייעק ABC· אויף BC צייכן אויף ליאד א וועלכן פּאַראַלעלאָגראַם BCXY (X ליגט אנטקעגן B)· פון X פיר א פּאראלעלע צו AC, פון Y צו AB· די פּאראלעלע שניידן זיך אין L· פיר ליאד א וועלכע גראָדע, וואז שניידט די גראָדע LY אין F; פון A פיר א פּאראלעלע צו BF, וואס שניידט LF אין G, באקומסטו דעם פּאַראַלעלאָגראַם ABFG· פּונקט אזוי קאנסטרויר א פּאַראַלעלאָ־גראַם אויף AC·

ווען דו ווילסט וויסן, ווי צו קנייטשן, כדי צו ווייזן (ניט צו באווייזן) די ריכטיגקייט פון דער טעארעמע, דערמאן זיך די פיגור 128·

אויפגאָבן און איינניטונגען.

1. זאג מיט דיינע אייגענע ווערטער, וואס דו פארשטייסט אונטער די אויסדרוקן: אויבערפלאַך, פליין, ליניע, גראָדע, פינטל. זיי מבאר דיין ענטפער מיט משלים (א ציגל, א פילקע, א חדר...) (§§ 1 און 2).

2. נעם דריי פינטלעך אויף א פליין. ווייז, וויפיל גראָדע דו באקומסט, פארבינדנדיג די פינטלעך פאָרוויז. מאך דאס אייגענע מיט פיר און פינף פינטלעך (§ 3).

3. מאך פון דיין בלאַט פאפיר א מאדעל פון צוויי גראָדע, וואס ליגן ניט אויף איין פליין, און ווייז א פינטל, וואס ליגט ניט אויף קיין איינער פון ביידע גראָדע. ווייז, אז דורך יענעם פינטל קען דורכגיין בלויז איין גראָדע, וואס שניידט ביידע אנדערע גראָדע, און זיי מבאר אויף דיין מאדעל, ווי זי מוז ליגן.

(ווען דו וועסט איינקנייטשן צוויי גראָדע, און דערנאך א דריטע גראָדע, וואס זאל קווער שניידן ביידע ערשטע, קענסטו האלטן דאס פאפיר פון אונטן אין דעם דריטן קנייטש אזוי, אז דו וועסט בולט זעהען, אז די צוויי ערשטע גראָדע ליגן ניט אויף איין פליין. זאל דארטן, וואו דו האלטסט די פינגער, ליגן א פינטל P. ער ליגט ממילא ניט אויף קיין איינער פון ביידע ערשטע גראָדע. דער קנייטש איז די איינציגע גראָדע דורכן פינטל P, וואס שניידט ביידע ערשטע גראָדע).

4. ווייז, אז דריי גראָדע, וואס ליגן ניט אלע דריי אויף איין פליין, אבער שניידן זיך פארוויז, האבן א בשותפותדיגן פינטל.

5. ווייז, אז דריי גראָדע, וואס שניידן זיך פארוויז, אבער ניט אין דעמזעלביגן פינטל, ליגן אויף איין פליין (§ 3).

6. עס זיינען געגעבן א פינטל אויף א רינג און א גראָדע דורך דעם צענטער פון דעם רינג. ווייז, וויאזוי עס ווערט באשטימט א צווייטער פינטל אויף דעם רינג, און באווייז די ריכטיגקייט פון דיין קאנסטרוקציע (§ 8).

7. קאנסטרואיר א ראָד דורך א געגעבענעם פינטל מיט א געגעבענעם ראַדיוס; זוך אויף דעם געאמעטרישן אָרט פון אלע אזעלכע פינטלעך (§ 8).

8. לייג אפ דריי פינטלעך A, B און C פון לינקס אויף רעכטס אויף א גראָדער ליניע, און צעטייל אויף העלפט AB אין M. ווייז, אז MC איז א העלפט פון דער סומע פון AC און BC, און אז MB איז די העלפט פון דעם אונטערשייד צווישן AC און BC (§ 9).

9. צייכן אויף דריי שטראלן אין דעם סדר OA, OB, OC אין דער ריכטונג פונם זייגערווייזער. צעטייל דעם ווינקל AOB אויף העלפט דורך דעם ביסעקטאר OM; ווייז, אז דער ווינקל MOB איז די העלפט פון דעם אונטערשייד צווישן די ווינקלען AOC און BOC, און אז דער ווינקל MOC איז די העלפט פון דער סומע פון דיזעלביגע ווינקלען (§ 11).

10. באשרייב א ראָד מיט א געגעבענעם ראדיוס דורך צוויי געגעבענע פינטלעך (§ 13).

11. קאנסטרואיר פיר שטראלן OA, OB, OC און OD אין דער ריכטונג פונם זייגערווייזער און אזוי, אז דער ווינקל AOB = ווינקל COD, און דער ווינקל BOC = ווינקל DOA. וויפיל גראָדע בילדן די שטראלן (§ 13).

12. קאנסטרואיר א ראד מיט א ראדיוס פון דריי סאנטימעטער אזוי, אז דער צענטער זאל האבן דעמזעלביגן אפשטאנד פון דריי פינטלעך A, B און C (§ 13).

13. AB איז דער דיאמעטער פון א ראָד און CD איז זיין כאָרדע. פיר אדורך AM און BN פערפענדיקולאר צו CD און באווייז, אז CN און DM זיינען גלייך (§ 13).

14. אויף וויפיל טיילן ווערט א פליין צעטיילט דורך פיר גראָדע, וואס זיינען די פארלענגערונגען פון די זייטן פון א ראָמב איןביידע ריכטונגען.

פיר אדורך איין גראָדע, וואס ליגט טיילווייז אין דריי פון אַלע טיילן, איין גראָדע, וואס ליגט אין פיר טיילן, און איין גראָדע, וואס ליגט אין פינף טיילן. צי קענסטו דורכפירן א גראָדע, וואס גייט אדורך דורך קנאפער פון דריי אדער דורך מער פון פינף טיילן? (§ 14).

15. ווייז, אז יעדערע צוויי קערפערליכע דיאגאנאלן פון א גראָדווינקל־דיגן פאראלעלעפּיפּעד שניידן זיך און האבן א גלייכע לענג. באווייז, אז אלע דיאגאָנאלן פון א פאראלעלעפּיפּעד שניידן זיך אין איין פינטל (§ 16).

16. נעם א מאדעל פון א גראָדווינקלדיגן פאראלעלעפּיפּעד און ווייז, וויאזוי מען קען אנצייכנען א פליין, וואס אנטהאלט דריי קערפערליכע דיאגאָנאלן.

ווייז, וויאזוי מען קען אנצייכנען א פליין, וואס אנטהאלט צוויי דיאַגאָנאלן פון די ווענטלעך און איין קערפערליכן דיאגאָנאל (§ 16).

17. אויף וויפיל טיילן ווערט דער רוים צעטיילט דורך די פליינען, וואס זיינען די פארלענגערונגען פון די ווענטלעך פון א קוב? (§ 16).

18. קנייטש אויס צוויי גראָדע, וואס שניידן זיך אויף א בלאַט פּאַפּיר, און גרייט צו א מאָדעל, וואס זאל ווייזן א גראָדע, א פּערפּענדיקולארע צו יענעביידע גראָדע אין זייער שניטפּינטל.

(OA און OB זיינען די צוויי גראָדע. שטעל אויף א פּערפּענדיקולאר CO צו OA אויף דער זייט פון OA, וואו עס ליגט ניט OB; שטעל אויף א פּערפּענדיקולאר OD צו OB אויף דער זייט פון OB, וואו עס ליגט ניט OA. איצט, לאזנדיג ליגן OA אוין OB האריזאנטאל, הייב אויף די פּערפּענדיקולארן OC און OD אזוי, אז, שטייענדיג איבער דעם האריזאנ־טאלן פליין, זאלן זיי ביידע באדעקן איינער דעם אנדערן. די צונויפּ־געשמאָלצענע ליניע (זי שטייט ווערטיקאל) איז דער פארלאנגטער פּער־פּענדיקולאר (§ 18).

19. ווייז אויף דעם מאדעל פון נומער 18, אז, ווען OK איז א שטראל פון O, און OK איז ניט פּערפּענדיקולאַר צום אויפגעשטעלטן פּערפּענ־דיקולאר, דעמאלט ליגט KO ניט אויף דעם פליין OAB (§ 18).

באוויז ווייטער, אז אלע גראָדע, וואס שטייען פּערפּענדיקולאר צו א געגעבענער גראָדער אין דעמזעלביגן פּינטל אירן, ליגן אויף איין פליין (§ 18).

20. ווייז, אז דורך א פּינטל פון א גראָדער איז מיגליך בלויז איין פליין, א פּערפּענדיקולארער צו דער גראָדער. קאנסטרואיר א פּאפּירענעס מאדעל פון אזא פליין (ז. נומער 18).

21. A און B זיינען צוויי געגעבענע פּינטלעך. P איז א פּינטל, וואס שטייט אָפּ גלייך ווייט פון יענע ביידע. ווייז, אז, ווען מען שטעלט אויף אין P א פּערפּענדיקולאר צום פליין ABP, איז אלע פּינטלעך פון דעם פּערפּענדיקולאר שטייען אָפּ גלייך ווייט פון A און B.

ווייז אז יעדער פּינטל, וואס ליגט ניט אויף דעם פּערפּענדיקולאר, שטייט אָפּ פארשיידן ווייט פון די פּינטלעך A און B (§ 18; נומער 18).

22. L און M זיינען די מיטנס פון די זייטן AB און AC פון א גלייכ־אקסלדיגן דרייעק ABC. BM און CM שניידן זיך אין O. ווייז, אז AO איז פּערפּענדיקולאר צו BC (§ 19, קנייטשן!).

23. אויף וויפיל טיילן צעפאלט א פליין דורך דריי גראָדע, וואס זיינען פארלענגערטע זייטן פון א דרייעק (§ 19).

(די טיילן ווערן באשטימט דורך דעם פאקט, אז צוויי פּינטלעך, וואס ליגן אין איין טייל, קענען פארבונדן ווערן דורך א אפשניט, וואס

שניידט ניט קיין איינע פון די דריי ליניעס, איינדערצייט ווען צוויי פינטלעך, וואס ליגן ניט אין איין טייל, קענען אזוי ניט פארבונדן ווערן).

וועלכער פון אטדי טיילן פון דעם פליין איז אומענדליך? (§ 19).

24. קאנסטרואיר א גראַדע, וואס גייט אדורך דורך פיר פון יענע טיילן. צי קענסטו פירן א גראַדע, וואס גייט אדורך דורך מער ווי פיר אזעלכע טיילן? (§ 19).

25. קאנסטרואיר א גלייכאַקסלדיגן דרייעק ABC, וואס זיין זייט AB איז גלייך דער זייט AC. קאנסטרואיר אויף BC א קוואדראט BCDE אויף דער זייט פון BC, וואס ליגט אנטקעגן A. פיר אדורך AD און AE און ווייז, אז ADE איז א גלייכאַקסלדיגער דרייעק (קנייטש! §§ 15 און 19).

26. ABC איז א גלייכאַקסלדיגער דרייעק מיט די אקסלען AB און AC. D איז דער פינטל, אין וועלכן דער ביסעקטאר פון דעם ווינקל ABC שניידט די אנטקעגנדיגע זייט AC, און E איז דער פינטל, אין וועלכן דער ביסעקטאַר פון דעם ווינקל ACB שניידט די אנטקעגנדיגע זייט AB. ווייז, אז BD = CE (§ 19).

27. אין דעמזעלביגן דרייעק פיר אדורך די ביסעקטארן פון די דרויסנ־דיגע ווינקלען, וואס דער גרונט BC בילדעט מיט די פארלענגערונגען פון AB און AC. די ביסעקטארן שניידן AB און AC אין K און L. ווייז, אז BK = CL (§ 19). — דער דרייעק דארף ניט זיין קיין גלייכ־זייטיגער! —.

28. געפין א פינטל אויף איין זייט פון א דרייעק, וואס שטייט אַפּ גלייך ווייט פון די עקן פון איינער פון די אנדערע זייטן.

29. AX און BY זיינען די פערפּענדיקולארן, די אראפּגעלאזענע פון A און B אויף דער גראַדער XY. די סומע זייערע איז גלייך דער לענג פון XY. געפין א פינטל O אויף XY אזוי, אז AOB זאל זיין א גראַדער ווינקל (§ 19).

30. דער גרונט פון א דרייעק און די לענג פון דער ליניע, וואס פאר־בינדט דעם מיטן פון דעם גרונט מיט דעם אנטקעגנדיגן שפּיץ, זיינען באוואוסט. איינע פון דעם דרייעקס זייטן האלט א העלפט פון דעם גרונט. קאנסטרואיר דעם דרייעק (§ 19).

31. קאנסטרואיר א גלייכזייטיגן דרייעק מיט א געגעבענער הייך (§ 20).

32. ווייז, אז יעדער פינטל אינם רוים, וואס שטייט אַפּ גלייך ווייט פון די דריי עקן פון א גלייכזייטיגן דרייעק ABC, ליגט אויף דער גראַדער, וואס

איז פערפענדיקולאר צו דעם פליין פון דעם דרייעק אין דעם צענטער פון דעם דרייעק (§§ 18 און 20).

33. פון א געגעבענעם פינטל פיר אדורך זעקס אפשניטן, וואס זאלן האבן א גלייכע לענג און בילדן גלייכע ווינקלען צווישן זיך.

34. ABC איז א גלייכזייטיגער דרייעק. די פערפענדיקולארן פון A און B צו די אנטקעגנדיגע זייטן שניידן זיך אין O. ווייז, אז BO = AO, AO = 2OL, OL = OM.

ווייז, אז די פערפענדיקולארן פון A, B און C (די הייכן) צו די אנט־קעגנדיגע זייטן שניידן זיך אין איין פינטל O (דער פינטל O הייסט דער שניטפינטל פון די הייכן פון דעם דרייעק) (§ 20).

35. ווייז, אז די דיאגאנאלן פון די ווענטלעך פון א גראַדווינקלדיגן פאַראַלעלעפיפעד ליגן זאלבעדריט אויף איין פליין, און קיין איינער פון די פליינען אנטהאלט ניט קיין קערפערליכן דיאַגאָנאַל פון דעם פאַראַלעלע־פיפעד.

ווייז, אז דורך יעטוועדן דיאגאנאל פון די ווענטלעך גייען אדורך צוויי פון אטדי פליינען, און אז זיי שניידן אפ פון דעם פאַראַלעלעפיפעד טעטראעדערס, אבער ניט רעגולערע טעטראעדערס (§ 23).

36. אויף וויפיל טיילן צעפאלט דער רוים דורך די פליינען, וואס זיינען פארלענגערונגען פון די ווענטלעך פון א טעטראעדער?

ווייז, וויאזוי מען דארף אויסקלייבן צוויי פון אטדי טיילן אזוי, אז א אפשניט, וואס פארבינדט א פינטל אין איין טייל מיט א פינטל אין דעם אנדער טייל, זאל שניידן בלויז איינעם פון די פליינען.

ווייז, וויאזוי מען דארף אויסקלייבןביידע טיילן, כדי דער אפשניט זאל שניידן צוויי פון די פליינען (§ 23).

37. וועלכע קאנטן פון דעם שיפעלע זיינען פערפענדיקולאר צו דער ווענטל 2? (§ 23).

38. V איז דער אויבערשטער עק (דער שפיץ) פון א רעגולערן טעטרא־עדער VABC. דער פערפענדיקולאר פון V צו דעם פליין ABC שניידט אים אין O. ווייז, אז O איז דער שניטפינטל פון די הייכן פון דעם דרייעק ABC. (דער אפשניט OV הייסט די הייך פון דעם טעטראעדער.) (§ 23 און נומער 23).

39. קאנסטרואיר א גראָדע גלייך דער הויך פון א געגעבענעם רעגולערן טעטראעדער (§ 23).

40. קאנסטרואיר א רעגולערן טעטראעדער מיט א געגעבענער הייך (§ 23).

41. עס איז געגעבן א טעטראעדער VABC. ווייז, אז דער פערפענדיקולאר פון V צו דער ווענטל ABC שניידט דעם פערפענדיקולאר פון A צו דער ווענטל VBC. (ביידע פערפענדיקולארן ליגן אויף דעם פליין, וואס איז דורכגעלייגט דורך דעם מיטן פון BC און דורך AV.) (§ 23)

42. ווייז, אז אלע פערפענדיקולארן פון די עקן פון א רעגולערן טעטראעדער צו די אנטקעגנדיגע ווענטלעך שניידן זיך אין איין פינטל G (§ 23).

צום באווייז באנוץ דעם פריהערדיגן נומער.

G הייסט דער באַריצענטר, אדער דער שווערפינטל פון דעם טעטראעדער. ווען דו וועסט אויפהענגען דעם טעטראעדער פאר איינעם פון זיינען עקן, וועט דער טעטראעדער הענגען אזוי, אז די גראָדע ליניע פון דעם שנור וועט דורכגיין דורך דעם שווערפינטל.

43. ווייז, אז דער שווערפינטל פון דעם טעטראעדער האט א גלייכן אפשטאנד פון אלע פיר עקן. קאנסטרואיר א אפשניט, וואס זאל זיין גלייך אטדעם אפשטאנד אין א געגעבענעם טעטראעדער.

44. קאנסטרואיר א דרייעק, ווען עס איז געגעבן, אז צוויי ווינקלען זיינע בעטרעפן צוזאמען $^{2}/_{3}$ פון א גראָדן ווינקל, און איינער פון אטדי ווינקלען איז גלייך א האלבן גראָדן ווינקל, און די לענג פון דעם פערפענדיקולאר פונם שפיץ פון דעם דריטן ווינקל צו דער אנטקעגנדיגער זייט איז גלייך דער ברייט פון דיין לינקן גרויסן פינגער, ווען דו פרעסט אים צו צום פאפיר (§ 24).

45. ABC איז א שמאלווינקלדיגער דרייעק. באווייז, אז די סומע פון זיינע דריי הייכן איז גרעסער ווי די האלבע סומע פון זיינע זייטן (§ 24).

46. ווייז, אז דער אונטערשייד צווישן צוויי זייטן פון א דרייעק איז קלענער ווי די לענג פון דער דריטער זייט (§ 24).

47. ABC איז א גראָדווינקלדיגער גלייכאקסלדיגער דרייעק, און M איז דער מיטן פון דער היפאטענוזע BC. אויף AM, אויף דער זייט פון איר, וואו עס ליגט C, ווערט קאנסטרואירט א גלייכזייטיגער דרייעק DAM. באווייז, אז CD איז קלענער ווי BC (§ 24).

48. ABC איז א גלייכזייטיגער דרייעק, D א פינטל אויף AB, E אויף BD, און F אויף DA אזוי, אז AD, BE און CF זיינען גלייך. קאנסטרואיר אטדי פיגור און ווייז, אז דער דרייעק DEF איז א גלייכזייטיגער (§ 25).

49. ווייז, אז אויף יעדן דרייעק, אלס אויף א גרונט, קען קאנסטרואירט ווערן א טעטראעדער DABC אזוי, אז די ווינקלען ADB, BDC און CDA זאלן אלע זיין גראַדע ווינקלען (§ 23).

(באנוץ דערצו דעם מאדעל פון א קוב. דער דרייעק ABC מוז קאנסטרואירט ווערן אין אזא קליינעם מאסשטאב, אז קיין איינע פון זיינע זייטן זאל ניט זיין גרעסער ווי דער דיאגאנאל פון א ווענטל פונם קוב. שנייד ארויס דעם דרייעק מיט א מעסער, שאנעווענדיג דאס איבעריגע פאפיר. איצט טו אן דאס פאפיר מיט דעם אויסגעשניטענעם לאָך אויף איינעם פון דעם קובס עקן. מען קען דעם אויסשניט צופאסן גענוי צו דעם אויבערפלאך פון דעם קוב און אפצייכענען די רענדער פון דעם לאָך אויף דעם מאדעל. איצט וועסטו לייכט זעהען דעם פארלאנגטן טעטראעדער.)

50. DABC איז א טעטראעדער. זיינע ווינקלען ADB, BDC און CDA זיינען גראַדע. ווייז, אז דער פערפענדיקולאר פון D צו דעם פליין ABC שניידט אלע הייכן פון דעם דרייעק ABC. (באנוץ דעם מאדעל פון א קוב. דער פארלאנגטער פערפענדיקולאר ליגט אויף דעם פליין, וואס גייט אדורך דורך D פערפענדיקולאר צו AB. אטדעם פליין קען מען לייכט זעהען אויף דעם מאדעל: ער אנטהאלט DC. ער שניידט דעם פליין ABC אין דער הייך פון C צו AB.)

51. ווייז, אז די דריי הייכן פון יעטוועדן דרייעק, ד. ה. די דריי פערפענדיקולארן פון זיינע עקן צו די אנטקעגנדיגע זייטן, שניידן זיך אין איין פינטל (ז. נומער 50 און 35). דער פינטל הייסט דער שניטפינטל פון די הייכן פונם דרייעק.

52. ABC איז א דרייעק. קאנסטרואיר צוויי גלייכזייטיגע דרייעקן אויף BC און AC (BCD און ACE), ניט פארדעקנדיג דעם דרייעק. באווייז, אז די דרייעקן ACD און BCE זיינען קאנגרועגט.

קאנסטרואיר אויך אויף AB א גלייכזייטיגן דרייעק ABF דרויסן פונם דרייעק ABC. באווייז, אז $AD = BE = CF$ (§ 25).

53. קאנסטרואיר א דרייעק, ווען עס זיינען געגעבן זיין גרונט, די מעדיאנע צום גרונט און די הייך צום גרונט. קען מען קאנסטרואירן צוויי אזעלכע דרייעקן, וואס זאלן ניט זיין קאנגרועגט? (§ 25).

54. נעם אויף דיין מאדעל פון נומער 18 א פינטל L אויף OC און פיר א גראַדע LM פאראלעל צו OA.

ווייז, אז OB און LM זיינען אויסגעמיידטע גראַדע, און אז OC שניידטביידע אונטער גראַדע ווינקלען.

ווייז, אז OC איז די איינציגע גראַדע, וואס שניידט ביידע אויסגמיידטע קאַנטן אונטער גראַדע ווינקלען.

ווען P און Q זיינען צוויי פינטלעך אויף OB רעספעקטיווע LM, (אבער ניט O און L), ווייז, אז PQ איז גרעסער ווי OL (§ 24).

רעספעקטיווע. ווען איך ווייז פארשיידענע סימנים פון פאר־שיידענע פיגורן, זאג איך די סימנים אפארט און די פיגורן אפארט, אבער אין דעמזעלביגן סדר: דער ערשטער סימן איז פאר דער ערשטער פיגור, דער צווייטער פאר דער צווייטער, דער לעצטער פאר דער לעצטער. איך דריק דאס אויס מיט דעם לאטייניש וואָרט רעספעקטיווע. למשל, ווען איך זאג דריי פינטלעך M, K, L אויף די גראַדע AB רעספעקטיווע CD און EF, הייסט דאס: דער פינטל K ליגט אויף AB, דער פינטל L אויף CD, דער פינטל M אויף EF. ממילא קען איך זיך אויף אזא אופן קירצער אויסדריקן. און וואס קירצער, אלץ קלאָרער.

54a. די גראַדע OL הייסט די אקס פון די צוויי אויסגעמיידטע גראַדע; דער אפשניט OL הייסט דער קורצסטער אפשטאנד צווישן די צוויי אויסגעמיידטע גראַדע.

55. ווייז אויף דיין מאדעל, אז די לענג פון דעם פערפענדיקולאר, וועלכן מען קען אראפלאזן פון איינער פון צוויי אויסגעמיידטע גראַדע צו א פליין, א פאראלעלן צו איר, וואס גייט אדורך דורך דער צווייטער גראַדער, איז גלייך דעם קורצסטן אַפשטאנד צווישן די צוויי אויסגעווײדטע גראַדע.

56. ווייז אויף דיין מאדעל פון א קוב צוויי אויסגעמיידטע קאַנטן און זאג, ווי גרויס עס איז דער אפשטאנד צווישן זיי (§ 26).

57. נעם דיין מאדעל פון א רעגולערן טעטראעדער און זוך אויף אים אויף צוויי אויסגעמיידטע קאַנטן. זוך אויף דעם פליין, וואס גייט אדורך דורך איינער פון זיי און איז פערפענדיקולאר צו דער צווייטער. צייכן אָפּ אויף דיין מאָעעל די שניטליניע פון דעם פליין מיט דער ווענטל פון דעם טעטראעדער.

ווייז, אז די אקס ליגט אויף אטדעם פליין, און זוך אויף די פינטלעך, אין וועלכע זי שניידט די צוויי אויסגעמיידטע קאַנטן.

58. פיר א גראַדע אויף איינער פון די ווענטלעך פון א קוב און זוך

אויף דעם קורצסטן אפשטאנד צווישן איר און צווישן איינעם פון דעם קובס קאנטן, א פערפענדיקולארן צו דער ווענטל·

59· צוויי פאראלעלע שניידן דורך א ראָד· ווייז דורך קנייטשן, אז דער רינג איז צעטיילט אויף פיר בויגנס, וואס לכל הפחות צוויי פון זיי זיינען גלייך איינער דעם אנדערן (§ 26)·

ווען צוויי פון זיי זיינען ניט גלייך, דעמאלט קענסטו ווייזן (דורך קנייטשן), אז צוויי גראָדע, וואס פארבינדן די עקן פון איין בויגן מיט די עקן פון דעם אנדערן, שניידן זיך אויף דעם דיאמעטער, וואס איז פערפענדיקולאר צו די פאראלעלע (§ 26)·

60· קאנסטרואיר דעם געאמעטרישן אָרט פון די פינטלעך, וואס יעדער פון זיי שטייט אָפּ גלייך ווייט פון צוויי פאראלעלע (§ 26)·

61· קאנסטרואיר א דרייעק, ווען עס זיינען געגעבן זיין גרונט, זיין הייך און די מעדיאנע צו איינער פון די אנדערע זייטן (פיג· 60) (§ 26)·

62· פון א געגעבענעם פינטל פיר א גראָדע אזוי, אז איר אפשניט, וואס ליגט אין א געגעבענעם פאראלעלן פאס אויף דעמזעלביגן פליין, זאל זיין קלענער ווי דער פערפענדיקולארער אפשטאנט צווישן ביידע פאראלעלע (§ 26)·

63· ווייז, אז, ווען צוויי פליינען זיינען פאראלעל, איז צו יעדער גראָדער אויף איין פליין פארהאן א פאראלעלע אויף דעם צווייטן (§ 27)·

64· ווייז, אז, ווען צוויי פליינען זיינען פאראלעל, איז יעדע גראָדע, וואס איז פאראלעל צו איין פליין, פאראלעל אויך צו דעם אנדערן אדער זי ליגט אויף דעם אנדערן (§ 27)·

65· צוויי פליינען זיינען פאראלעל צו צוויי אנדערע פליינען, וואס שניידן זיך אין א גראָדער AB· ווייז, אז די ערשטע פליינען שניידן זיך אויכעט, און זייער שניטליניע איז פאראלעל צו AB·

66· ווייז, אז, ווען א גראָדע שניידט א פליין, שניידט זי אויך אלע פליינען, וואס זיינען פאראלעל צו דעם ערשטן (§ 27)·

67· פיר אדורך א גראָדע אויף א ווענטל פון א קוב; אויף דער אנטקעגנדיקער ווענטל פיר א פאראלעלע צו דער ערשטער גראָדער אזוי, אז דער אפשטאנד צווישן זיי זאל האבן א געגעבענע לענג, וואס איז קלענער פון דעם דיאגאנאל פון דער ווענטל, אבער גרעסער פון דער זייט פונם קוב·

«פערפענדיקולארער אפשטאנד», אדער בקיצור סתם «אפשטאנד» צווישן צוויי פאראלעלע הייסט דער פערפענדיקולאר פון וואָסער ניט פינטל פון איין פאראלעלער צו דער צווייטער.

68. ווייז, אַז, ווען א גראָדע איז פערפענדיקולאר צו א פליין, איז זי פערפענדיקולאר צו יעדן פאראלעלן פליין (§ 27).

69. קאנסטרואיר א קוואדראט ABCD. צעטייל אויף העלפט די זייט AD אין E, זוך אויף דעם צענטער O פון דעם קוואדראט און פיר אדורך OE. פיר EF פערפענדיקולאר צו EB; דער פערפענדיקולאר שניידט די פארלענגערונג פון CA אין F.

ווייז, אז די דרייעקן EAF און EOB זיינען קאנגרועגט, און אז CF איז דורך די פינטלעך O און A צעטיילט אויף דריי גלייכע טיילן (קנייטש!) (§ 29).

70. ABC איז א גלייכזייטיגער דרייעק. די פערפענדיקולארן פון A און B צו די אנטקעגנדיגע זייטן שניידן זיך אין O.

קאנסטרואיר א גלייכזייטיגן דרייעק DOC אויפן גרונט OC, אויף דער זייט פון OC, וואו עס ליגט ניט B. ווייז, אז דער שטח פון דעם דרייעק ABC איז דריימאל אזוי גרויס ווי דער שטח פון דעם דרייעק DOC (§ 29).

71. קאנסטרואיר א גלייכאקסלדיגן דרייעק מיט א געגעבענעם גרונט אזוי, אז יעדער ווינקל ביים גרונט זאל זיין גלייך $^1/_{10}$ פון דעם ווינקל ביים שפיץ (§ 29).

72. ABC איז א גלייכזייטיגער דרייעק. דער פערפענדיקולאר צו BC אין B שניידט די פארלענגערונג פון CA אין D. E איז דער מיטן פון BD. קאנסטרואיר די פיגור און ווייז, אז AE און CB זיינען פאראלעלע.

ווייז, אז, ווען ABC וואלט ניט געווען קיין גלייכאקסלדיגער דרייעק, וואלטן AE און BC ניט געווען פאראלעלע.

73. AB און CB זיינען גלייכע, ביינאנד ליגנדיגע, אפשניטן פון א גראָדער; אויף BC, אלס גרונט, שטייט א גלייכזייטיגער דרייעק CBM. אויף AM, אלס גרונט, שטייט א גלייכזייטיגער דרייעק NAM (ביידע דרייעקן פארדעקן ניט איינער דעם אנדערן). ווייז, אז NAB איז א גראָדער ווינקל (§ 29). (דער ווינקל MAC האלט 30°).

74. וויפיל גראָדע ווינקלען באטרעפט די סומע פון א זעקסעק?

75. עס זיינען געגעבן צוויי פינטלעך A און B און א גראָדע m. פיר אדורך א פאראלעלע צו m, וואס זאל אפשטיין גלייך ווייט פון A און פון

B. (פארבינד A מיט B, פון דעם מיטן פון AB פיר די פארלאנגטע פאראלעלע). (§ 29).

76. ווייז, אז צוויי ווינקלען, וואס זייערע זייטן זיינען פאראלעל, זיינען אדער גלייכע, אדער דערגאנצדיגע ווינקלען (§ 29)?

77. אויף וויפיל איז דער ווינקל ביים שפיץ פון אַ גלייכאקסלדיגן דרייעק קלענער איידער די סומע פוןביידע דרויסנדיגע ווינקלען צווישן דעם גרונט און צווישן די פארלענגערונגען פון ביידע זייטן (§ 29).

78. ABC איז א גלייכאקסלדיגער דרייעק מיט די גלייכע זייטן AB און AC. דער פערפענדיקולאר פון B צו AC שניידט AC אין D. קאנ־סטרואיר די פיגור און ווייז, אז דער ווינקל DBC איז א העלפט פונם ווינקל ביים שפיץ (§ 29).

79. ווייז, אז דער ווינקל צווישן דעם ביסעקטאר פון דעם ווינקל ביים שפיץ פון א דרייעק און צווישן דעם פערפענדיקולאר פון דעם שפיץ צו דעם גרונט איז גלייך א העלפט פון דעם אונטערשייד צווישן ביידע אנדערע ווינקלען פון דעם דרייעק (§ 29).

80. אויף א געגעבענער זייט, אלס גרונט, קאנסטרואיר א גלייכאקסל־דיגן דרייעק, וואס זיין ווינקל ביים שפיץ איז אין פיר מאל גרעסער ווי יעדער ווינקל ביים גרונט. וויפיל גראַד האלט דער ווינקל ביים שפיץ? (§ 29). (די קאנסטרוקציע ווערט אויסגעפירט אזוי: מען קאנסטרואירט אויף דעם גרונט א גלייכזייטיגן דרייעק און מען טיילט די ווינקלען ביים גרונט אויף העלפט.)

81. פארלענגער די זייט BC פון דעם דרייעק ABC ביז D. צעטייל אויף העלפט די ווינקלען BAC און ACD. ווייז, אז די ביסעקטארן קענען ניט זיין פאראלעל (§ 29). (פגל. פיג. 111).

82. ווייז אויף דיין מאדעל פון א קויל, אז א פליין דורך א פינטל פון דעם קויל שניידט דעם קויל אין א ראד, וואס זיין צענטער ליגט אוף דעם דיאמעטער פון דעם קויל, וואס איז פערפענדיקולאר צו דעם פליין; ווייז, אז, אויב דער פליין גייט ניט אדורך דורך דעם צענטער פונם קויל, איז דער ראד קלענער, ווי דער גרויסער ראד פון קויל. אזאַ ראד רופט מען א קליינעם ראד פונם קויל (§§ 8, 18, 30).

83. גרייט צו א מאָדעל פון א קויל מיט צוויי מערידיאנען, מיטן עקוואַ־טאר און מיט צוויי קליינע רעדער; די פליינען פון די קליינע רעדער מוזן זיין פערפענדיקולאר צו דער אקס. (ז. נומ. 82).

(די מערידיאַנען רופט מען אָפּט אן די רינגען פון דער [געאגראַפּישער] לענג; די פאַלאַרע רעדער — די רינגען פון דער [געאגראַפּישער] ברייט).

84. ווייז, אז אין א גראַדווינקלדיגן דרייעק איז דער ווינקל צווישן דעם פּערפּענדיקולאַר פון דעם שפּיץ פון דעם גראַדן ווינקל צו דער היפּאטענוזע און צווישן דער מעדיאַנע צו דער היפּאָטענוזע גלייך דעם אונטערשייד צווישןביידע שמאַלע ווינקלען פון דעם דרייעק (§ 30).

85. א אפשניט פון א געגעבענער לענג באַוועגט זיך אזוי, אז די צוויי עקן זיינע ליגן די גאַנצע צייט אויף די זייטן פון א גראַדן ווינקל. געפין מיט דיין פּאַפּירענער ווירע די מיטנס P, P_1 און P_2 פון דריי פאַרשיידענע לאַגעס פון דעם דעם אפשניט. זוך אויף דעם געאמעטרישן אָרט פון אלע פּינטלעך P פאַר אלע לאַגעס פונם אפשניט און קאָנסטרואיר דעם געאמעט־רישן אָרט (§ 30).

86. קאָנסטרואיר א גראַדווינקלדיגן דרייעק, וואָס איין שמאַלער ווינקל זיינער איז צוויימאָל אזוי גרויס ווי דער אַנדערער. ווייז, אז די היפּאטענוזע איז צוויימאָל אזוי גרויס ווי דער קלענערער קאַטעט (§ 30).

87. קאָנסטרואיר א דרייעק אזוי, אז דער מיטן פון איין זייט זיינער זאָל אפּשטיין גלייך ווייט פון די דריי עקן. וואָס ווייסן מיר וועגן די ווינקלען פון אַזא דרייעק? (§ 30).

88. קאָנסטרואיר א גראַדווינקלדיגן דרייעק, ווען עס איז געגעבן די לענג פון דער היפּאטענוזע און פון איין קאַטעט (§ 30).

89. ABC און DEF זיינען צוויי גראַדווינקלדיגע דרייעקן מיט גלייכע קאַטעטן AB און DE; דער קאַטעט AC איז גרעסער, ווי דער קאַטעט DF; ווייז, אז די היפּאטענוזע BC איז גרעסער, ווי די היפּאטענוזע EF (§ 30).

90. די רוימער האָבן אנגענומען, אז דער שטח פון א גלייכזייטיגן דרייעק, וואָס זיין זייט האַלט איין צאָל, איז גלייך א האַלבן קוואַדראַטצאָל; איז עס ריכטיג? אויב ניט, צי איז עס צו פיל אדער צו קנאַפּ? קאָנסטרואיר אויף א גרונט פון צוויי סאַנטימעטער אין דער לענג א גלייכאַקסלדיגן דרייעק פון איין קוואַדראַטסאַנטימעטער אין שטח (§§ 31 און 32).

91. באַווייז, אז דער שטח פון דעם קוואַדראַט אויף דעם קערפּערליכן דיאַגאָנאַל פון א קוב איז דריימאָל אזוי גרויס איידער דער שטח פון דעם קוואַדראַט אויף א זייט פון דעם קוב? (§ 32).

92. באַווייז, אז דער שטח פון דעם קוואַדראַט אויף דעם קערפּערליכן דיאַגאָנאַל פון א גראָדווינקלדיגן פּאַראַלעלעפּיפּעד איז גלייך דעם שטח

פון די דריי קוואדראטן אויף דריי קאנטן פון דעם פאראלעלעפיצער׳ וואס האבן א בשותפותדיגן עק (§ 32)·

93· מאך א מאדעל פון א קוב׳ ווען עס איז געגעבן אדער די לענג פון זיין קערפערליכן דיאגאנאל אדער די לענג פון דעם דיאגאנאל פון א ווענטל (§ 32)·

94· קאנסטרואיר א דרייעק ABC אזוי׳ אז BC זאל האלטן 12 סאנטי־מעטער׳ AB 10 סאנטימעטער׳ און די הייך אויף BC 8 סאנטימעטער· באווייז׳ אז דער דרייעק איז א גלייכאקסלדיגער (§ 32)·

95· די זייטן פון א דרייעק האלטן 3׳ 4 און 5 סאנטימעטער; ווייז׳ אז דער דרייעק איז א גראדווינקלדיגער (§ 32)·

96· ABC איז א גלייכאקסלדיגער דרייעק׳ און D א פינטל אויפן גרונט BC· פיר פון D פאראלעלע צו AB און צו AC· באווייז׳ אז די אפ־שניטן פון אטדי פאראלעלע׳ וואס ליגן אינווייניג אין דעם דרייעק׳ באטרעפן צוזאמען די לענג פון א אקסל (§ 33)·

97· ABC איז א גלייכזייטיגער דרייעק און D א פינטל אינווייניג אין אים· פיר אדורך דורך D פאראלעלע צו די זייטן פונם דרייעק און באווייז׳ אז די טומע פון זייערע אפשניטן׳ וואס ליגן אינווייניג אינם דרייעק׳ איז גלייך דער טאפעלער לענג פון דער זייט פונם דרייעק·

98· ABCD איז א פּאַראַלעלאָגראַם· קאנסטרואיר אן אנדער פּאַראַ־לעלאָגראַם PQRS׳ א ארומגעשריבענעם ארום דעם ערשטן׳ אזוי׳ אז אויף יעדער זייט פון PQRS זאל ליגן א עק פון ABCD· ווייז׳ אז די אפשניטן׳ אויף וועלכע יעדע זייט פון PQRS איז געטיילט דורך די עקן פון ABCD׳ האבן אויף אלע זייטן דיזעלביגע לענג (§ 33)·

99· שרייב אריין איין פּאַראַלעלאָגראַם אין דעם אנדערן אזוי׳ אז אויף יעדער זייט פון דעם צווייטן זאל ליגן א עק פון דעם ערשטן (פגל· נומער 98) (§ 33)·

100· זוך אויף דעם שניטפינטל O פון די דיאגאנלן פון א פּאַראַלעלאָ־גראַם ABCD און ווייז׳ אז יעדער אפשניט׳ וואס גייט דורך O׳ און וואס זיינע עקן ליגן אויף אנטקעגנדיגע זייטן פונם פּאַראַלעלאָגראַם׳ ווערט אין O צעטיילט אויף העלפט·

דער פינטל O הייסט דער מיטן פון דעם פּאַראַלעלאָגראַם (§ 33)·

101· ווען ABCD און PQRS זיינען צוויי פּאַראַלעלאָגראַמען׳ און אויף יעדער זייט פון דעם צווייטן ליגט איין עק פון דעם ערשטן׳ דעמאלט האבן ביידע פּאַראַלעלאָגראַמען א בשותפותדיגן מיטן (§ 33)·

102· קאנסטרואיר א גלייכזייטיגן דרייעק, וואס זיין שטח איז גלייך דעם שטח פון א געגעבענעם

1· קוואדראט;

2· ראָמב;

3· גראָדעק;

4· פּאַראַלעלאָגראַם;

5· זעקסעק· (§ 33)

103· קאנסטרואיר א גלייכזייטיגן דרייעק, וואס זיין שטח זאל זיין גלייך דער סומע פון די שטחס פון אלע ווענטלעך פון א געגעבענעם

1· רעגולערן טעטראעדער,

2· קוב,

3· קובישער פּריזמע,

4· פאראלעלעפּיפּעד (א האלבן קוב),

5· טאפּעלן טעטראעדער,

6· טעטראעדער,

7· רעגולערן אָקטאעדער·

104· נעם א דרייעק ABC· צעטייל זיינע זייטן AB, AC און BC אויף העלפט אין L רעספּעקטיווע M און N· זאל O זיין דער שניטפּינטל פון די מעדיאנעס AN און BM· ווייז, אז דער דרייעק OAB איז צוויי־מאל אזוי גרויס ווי דער דרייעק OLB, און אז $OA = 2ON$, $OB = 2BM$·

ווייז, אז אלע מעדיאנעס שניידן זיך אין איין פּינטל (§ 33)·

דער פּינטל O הייסט דער שווערפּינטל פון דעם דרייעק אדער דער באריצענטר פון דעם דרייעק·

105· צעטייל אויף העלפט די זייטן AB און AC פונם דרייעק ABC אין D רעספּעקטיווע E· ווייז, אז דער שטח פון דעם דרייעק DBC איז צווייִמאל אזוי גרויס ווי דער שטח פון דעם דרייעק DEC (§ 33)·

106· די דרייעקן ABC און DEF האבן גלייכע שטח'ס· זייערע גרונטן BC, DF ליגן אויף איין גראָדער און אויף איין זייט פון איר· ווייז, אז AD איז פאראלעל צו BC (§ 33)·

107· די דרייעקן KBC און LBC האבן גלייכע שטח'ס און א בשותּפותדיגן גרונט BC און ליגןביידע אויף דערזעלביגער זייט פון BC· ווייז, אז KL איז פאראלעל צו BC· (§ 33)·

108. K און L זיינען די מיטנס פון די זייטן AB רעספעק־טיווע AC פון דעם דרייעק ABC. ווייז, אז KL איז פאראלעל צו BC (§ 33).

109. BC און EF זיינען גלייכע אפשניטן אויף איין גראָדער. A און D זיינען צוויי פינטלעך, וואס ליגן אויף דערזעלביגער זייט פון דער ליניע אזוי, אז די דרייעקן ABC און DEF האבן גלייכע שטח'ס. ווייז, אז AD און BC זיינען פאראלעל. (§ 33).

110. זוך אויף דעם מיטן E פון א פּאַראַלעלאָגראַם ABCD; נעם אויף AB א פינטל P, פארבינד אים מיט E און פערלענגער די ליניע, ביז זי וועט זיך שניידן מיט CD אין Q. ווייז, אז AP = CQ (§ 33).

111. E איז דער מיטן פון דעם פּאַראַלעלאָגראַם ABCD. ווייז, אז די דרייעקן AEB און CED האבן א גלייכן שטח (§ 33).

112. נעם א פינטל E אויף דעם דיאגאנאל AC פון דעם פּאַראַלעלאָ־גראַם ABCD. ווייז, אז די דרייעקן EAB און EAD האבן א גלייכן שטח (§ 33).

113. ABC און LMN זיינען דרייעקן. AD און LP זיינען די פער־פענדיקולארן פון A אויף BC רעספעקטיווע פון L אויף NM. ווייז, אז, ווען AD איז גלייך MN, און LP איז גלייך BC, דעמאלט האבןביידע דרייעקן א גלייכן שטח (§ 33).

(יעדערער האט דעמזעלביגן שטח ווי א באשטימטער גראָדווינקלדיגער דרייעק).

114. ווייז, וויאזוי מען קען צעטיילן דעם שטח פון א דרייעק אויף 2, 4, 6, 8, 16 ... גלייכע טיילן (§ 33).

115. ווייז, אז די ביסעקטארן פון א פּאַראַלעלאָגראַם שניידען זיך אזוי, אז זיי בילדן א גראָדעק (ווייל יעדע פּאָר ביסעקטארן שניידן זיך אונטער א גראָדן ווינקל).

116. ABC איז א גראָדווינקלדיגער דרייעק, M דער מיטן פון דער היפּאָטענוזע, AE דער ביסעקטאר פונם גראָדן ווינקל, AD די הייך צו דער היפאטענוזע. ווייז, אז AE צעטיילט אויף העלפט דעם ווינקל צווישן AM און AD (§ 35).

117. פון דעם עק D פון א פּאַראַלעלאָגראַם ABCD איז געפירט א גראָדע, וואס שניידט BC אין E און די פארלענגערונג פון AB אין F. ווייז, אז די דרייעקן ADE און FDC האבן א גלייכן שטח (§ 33).

118. שרייב אריין א גראָדעק אין א געגעבענעם ראָמב אזוי, אז זיין שטח זאל זיין גלייך א האלבן שטח פונם ראמב (§ 33).

119. באווייז, אז א פירעק, וואס די אנטקעגנדיגע זייטן זיינע זיינען גלייך, איז א פּאַראַלעלאָגראַם.

120. באווייז, אז די סומע פון די דיאגאנאלן פון א פּאַראַלעלאָגראַם איז קלענער ווי די סומע פון זיינע זייטן און גרעסער ווי א העלפט פון דער סומע.

121. באווייז, אז DE, וואס פאַרבינדט די מיטנס D און E פון די זייטן BC רעספעקטיווע CA פון א דרייעק ABC, איז גלייך דער העלפט פון AB.

פיר אויס, אז, ווען F איז דער מיטן פון AB, דעמאלט ווערט DE צעטיילט אויף העלפט דורך CF.

Druck der Spamerschen Buchdruckerei in Leipzig